

Wiederholungsaufgaben 12. Klasse

1.0 Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$. (Abitur 2019 Teil 1)

1.1 Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von f einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$ an.

1.2 Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion f' mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion f' , die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen $G_{f'}$ an.

2.0 Für eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

I. $f(0) = 0$ II. $f'(0) = 0$
 III. $f(-3) = -3$ IV. $f'(-3) = -1$

Der zugehörige Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

(Abitur 2019 Teil 2 AI)

2.1 Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von f aufgrund obiger Gleichungen hat.

2.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f .

(Mögliches Teilergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$)

2.3.0 Im Folgenden wird die Funktion g mit $g(x) = f(x)$ und der im Vergleich zu D_f eingeschränkten Definitionsmenge $D_g = [-4, 5; 1]$ betrachtet. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

2.3.1 Ermitteln Sie die Wertemenge W_g der Funktion g . Bestimmen Sie dazu die Koordinaten sämtlicher Extrempunkte.

2.3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion g .

2.3.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_g in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. Ermitteln Sie dazu die Nullstellen der Funktion g . Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

3.0 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung $w(t) = at^4 + bt^3 + c$ mit geeigneten Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und der Definitionsmenge $D_w = [0; 30]$ beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Der Funktionswert $w(t)$ gibt den Wasserstand des Flusses in cm an.

Zu Monatsbeginn lag der Wasserstand bei 200 cm und am Monatsende bei 308 cm.

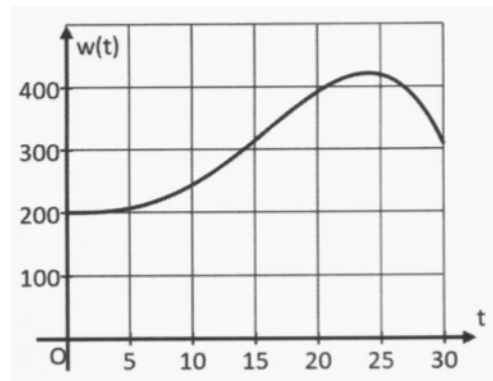
Der höchste Wasserstand wurde am 25. März – also zum Zeitpunkt $t_{\max} = 24$ – gemessen.

Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand $w(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t .

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.

(Abitur 2019 Teil 2 All)



3.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b und c und damit die zugehörige Funktionsgleichung von w .

(mögliches Ergebnis: $w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$)

3.2 Berechnen Sie den höchsten Pegel im Beobachtungszeitraum zentimetergenau.

3.3 Ermitteln Sie rechnerisch das Datum im Beobachtungszeitraum, an dem die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten war.

4.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto x^3 + 3x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

4.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen G_g mit der x-Achse.

4.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente des Graphen G_g .

5.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto e^{0,25x} - e^{-0,25x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

(Abitur 2019 Teil 1)

5.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g zum

Koordinatensystem und geben Sie $\int_{-2}^2 g(x) dx$ an.

5.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$.

6.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 \cdot e^{-x}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

(Abitur 2019 Teil 2 All)

6.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.

6.2 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt, und damit die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f .

6.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1 \leq x \leq 6$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

7.0 Zur Unterstützung von Gärprozessen, z.B. bei der Herstellung von Lebensmitteln, werden Hefen benötigt. Die Hefezellen wachsen in Behältern mit Nährlösung. Bei einer bestimmten Hefekultur verdoppelt sich die Anzahl der Hefezellen im Durchschnitt stündlich. Zu Beginn des Wachstumsprozesses wird Hefe mit der Masse 0,5 g in den Behälter eingebracht.

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

7.1 Stellen Sie eine Wertetabelle auf, in der Sie die Hefemassen nach 0, 1, 2, 3 und 4 Stunden eintragen.

7.2 Geben Sie einen Funktionsterm $H(t)$ an, der die Abhängigkeit der Hefemasse in Gramm von der Zeit t in Stunden beschreibt.

8 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto e^x - 1$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Nullstelle von k und begründen Sie, dass k die Wertemenge

$W_k =]-1; \infty[$ hat. (Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

9.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2(x-2)^2 \cdot e^{-0,5x}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)

9.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.

9.2 Berechnen Sie jeweils die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f . Runden Sie die y -Werte gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

(Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -(x^2 - 8x + 12) \cdot e^{-0,5x}$)

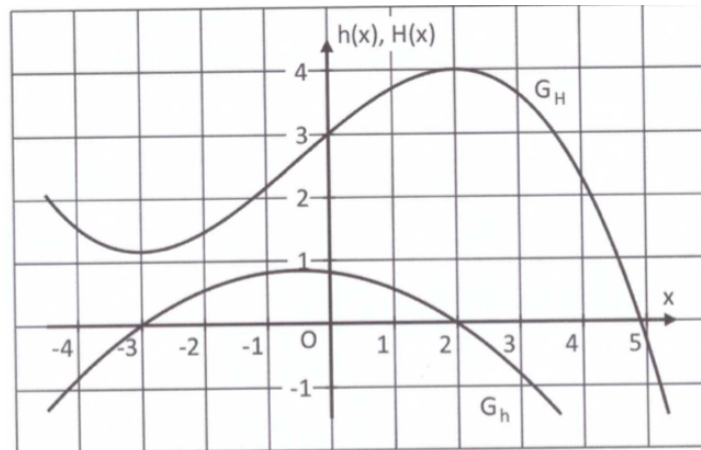
9.3 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0 \leq x \leq 12$ mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.

(Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm)

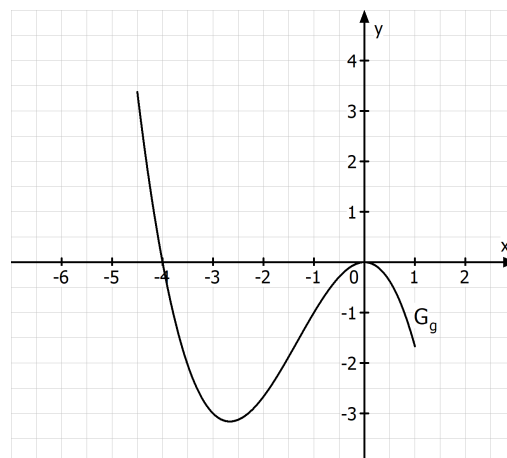
Begründen Sie mithilfe des Verlaufs von G_f , ohne weitere Rechnung, in welchen der angegebenen Intervalle sich jeweils eine Wendestelle befindet.

$I_1 =]0; 2[$; $I_2 =]2; 6[$; $I_3 =]6; 12[$

- 10 In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen der Funktion h und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion H von h dargestellt. Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz $H(2) - H(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von h geometrisch. (Abitur 2019 Teil 1)



- 11 Der Graph der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$ mit $D_g = [-4, 5; 1]$ und die x -Achse schließen im III. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. (Abitur 2019 Teil 2 AI)



- 12 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung

$$w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$$

mit der Definitionsmenge $D_w = [0; 30]$ beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Der Funktionswert $w(t)$ gibt den Wasserstand des Flusses in cm an.

Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand $w(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t .

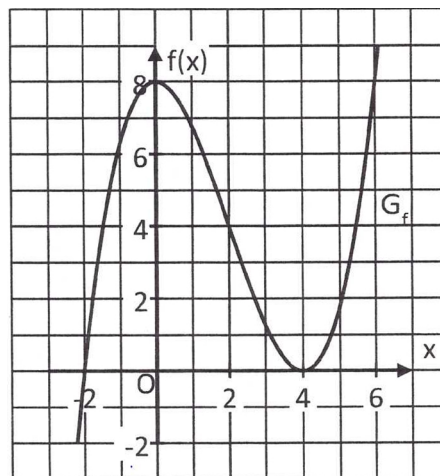
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.

(Abitur 2019 Teil 2 All)

Berechnen Sie $\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} w(t) dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

- 13 Untenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f . Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind.
(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)



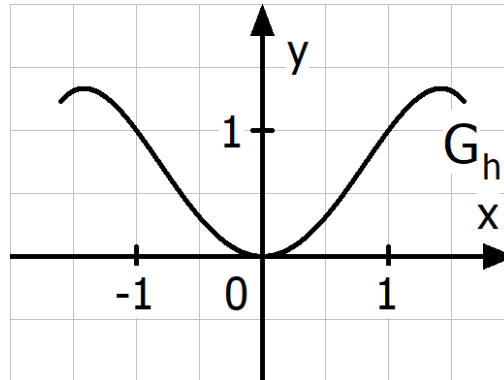
- A. Der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion von f hat an der Stelle $x = 4$ einen Extrempunkt.
- B. Für $0 < x < 4$ gilt $f'(x) < 0$.
- C. Der Graph G_f einer Stammfunktion von f ist im Intervall $[-1; 2]$ echt monoton steigend.
- D. Der Graph G_f einer Stammfunktion von f hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt.

14.0 Der Querschnitt einer Designer-Dachrinne wird durch den Graphen der Funktion

$$h: x \mapsto -\frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^2 \text{ mit der Definitionsmenge } D_h = [-1,6; 1,6] \text{ beschrieben (siehe$$

Skizze). x und y sind Längenangaben in der Einheit dm. Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)



14.1 Berechnen Sie, bis zu welcher maximalen Höhe $h_{\max}$ bezüglich des tiefsten Punktes der Dachrinne diese gefüllt werden kann, bevor sie überläuft.

14.2 Ermitteln Sie, welche Querschnittsfläche in dm^2 das Wasser ausfüllt, wenn es 1 dm hoch in der Dachrinne steht. Entnehmen Sie dazu geeignete ganzzahlige Werte aus der Zeichnung. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

15.0 Der Verlauf der Anzahl der Neuerkrankungen für eine bestimmte Grippewelle in einer gewissen Region in Abhängigkeit von der Zeit kann vereinfacht durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,5t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Wochen ab Beginn der Grippewelle zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert $N(t)$ gibt die Anzahl der an Grippe neu erkrankten Menschen in Tausend an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2019 Teil 2 AI)

15.1 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt $t_{\max}$ die Zahl der neu erkrankten Menschen ihr Maximum annimmt und berechnen Sie diese maximale Anzahl.

(Teilergebnis: $\dot{N}(t) = (4t - t^2) \cdot e^{-0,5t}$)

15.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $N(t)$ für $t \rightarrow \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

15.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion N im Bereich $0 \leq t \leq 10$ in ein geeignetes beschriftetes Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

15.4 Gegeben ist die Funktion $G: t \mapsto (-4t^2 - 16t - 32) \cdot e^{-0,5t}$ mit der Definitionsmenge

$D_G = \mathbb{R}_0^+$. Zeigen Sie, dass die Funktion G eine mögliche Stammfunktion von N ist.

Berechnen Sie damit die durchschnittliche Anzahl an neu erkrankten Menschen während der ersten acht Wochen ab Beginn der Grippewelle.

16.0 Der Bestand einer Bakterienkultur, der kontinuierlich Gift zugeführt wird, kann in den ersten fünf Stunden näherungsweise durch eine Funktion des folgenden Typs

beschrieben werden: $k: t \mapsto 50t \cdot e^{-at} + 10$ mit $t \in [0; 5]$.

Dabei gibt t die seit Beginn der Giftzugabe zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ vergangene Zeit in

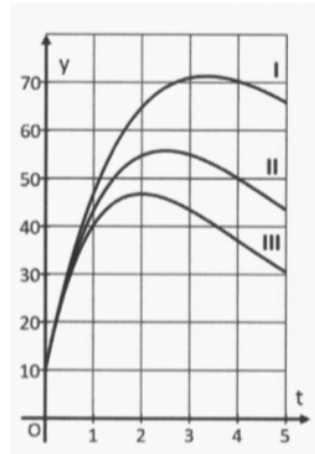
Stunden an. Der Funktionswert $k(t)$ gibt die Anzahl der Bakterien in Tausend an.

Je nach Wirksamkeit des Gifts ist a eine dem Gift entsprechende positive reelle Zahl.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Untenstehende Abbildung zeigt drei Ausschnitte von Graphen der Funktion k für verschiedene Werte für a . (Abitur 2019 Teil 2 All)



Graph I gilt für $a_1 = 0,3$ mit $k_I(t) = 50t \cdot e^{-0,3t} + 10$

Graph II gilt für $0,3 < a_2 < 0,5$ mit $k_{II}(t) = 50t \cdot e^{-a_2 t} + 10$

Graph III gilt für $a_3 = 0,5$ mit $k_{III}(t) = 50t \cdot e^{-0,5t} + 10$

16.1 Berechnen Sie für $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$ den Quotienten $\frac{k_{III}(t_2) - k_{III}(t_1)}{t_2 - t_1}$ und interpretieren Sie

das Ergebnis im Sachzusammenhang.

16.2 Überprüfen Sie bei der Funktion k_{III} rechnerisch, ob vier Stunden nach Beginn der

Giftzugabe die momentane Abnahmerate der Anzahl der Bakterien ca. 113 Bakterien pro Minute beträgt.

16.3 Entnehmen Sie der Abbildung ein geeignetes Wertepaar von Graph II und berechnen Sie damit den Wert a_2 für den Funktionsterm $k_{II}(t)$. Folgern Sie aus den Angaben und dem berechneten Wert für a_2 , wie die Größe von a mit der Wirksamkeit des Gifts zusammenhängt.

17.0 Der Tierpark Affenhaus öffnet jeden Tag um 10 Uhr und schließt um 18 Uhr. Die Besucherzahlen des Tierparks in Tausend können laut einem Modell

näherungsweise durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = \frac{1}{4}(8t - t^2)e^{0,4t-1}$

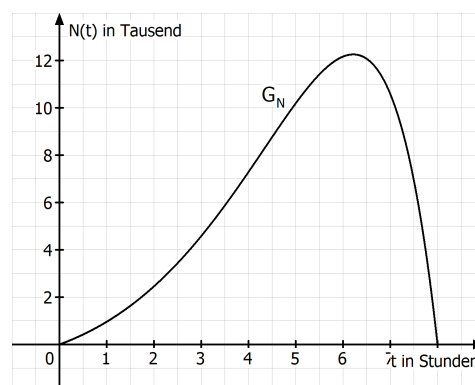
mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei gibt t die vergangene Zeit in Stunden seit Öffnung des Tierparks an einem bestimmten Tag an (Zeitpunkt der Öffnung des Tierparks: $t_0 = 0$).

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)

17.1 Der Betreiber des Tierparks möchte die Korrektheit dieses Modells überprüfen. Dazu wird unter anderem um 12 Uhr die tatsächliche Anzahl der Besucher im Tierpark bestimmt. Wenn dieser Wert innerhalb einer Abweichung von 10 % um den mit dem Modell errechneten Wert liegt, wird das Modell punktuell als korrekt angesehen. Bestimmen Sie das Intervall, in dem die tatsächliche Besucherzahl um 12 Uhr liegen muss, damit die Prüfung zu dieser Uhrzeit positiv ausfällt.

17.2.0 Im Folgenden wird das Modell als korrekt betrachtet.

In der Abbildung sehen Sie den Verlauf der Besucherzahlen nach dem Modell über die Zeit nach der Öffnung des Tierparks graphisch dargestellt.

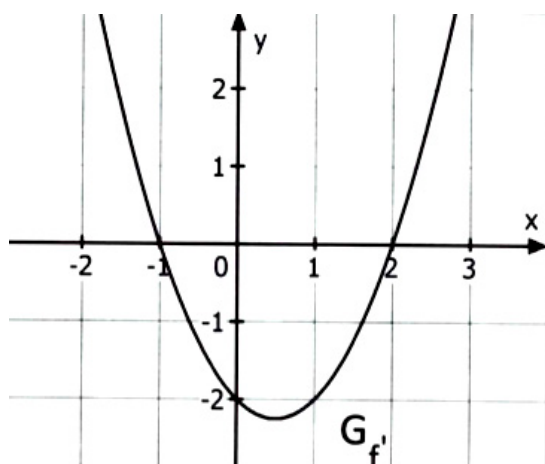


17.2.1 Das Betreiben der Eisdiele „Pinguin“ ist nur rentabel, wenn sich mindestens 4000 Personen im Tierpark befinden. Ermitteln Sie anhand der Abbildung näherungsweise die Tageszeiten, zu denen die Eisdiele rentabel ist.

17.2.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt nach der Öffnung des Tierparks, an dem sich die meisten Besucher im Zoo befinden und berechnen Sie diese höchste Anzahl.

(Mögliches Teilergebnis: $\dot{N}(t) = \frac{1}{10}(-t^2 + 3t + 20) \cdot e^{0,4t-1}$)

- 18.0 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise eine Parabel. Diese ist der Graph der Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
 (Abitur 2020 Teil 1)



- 18.1 Leiten Sie nachvollziehbar aus dem Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion f' die Lage und Art der lokalen Extremstellen von f ab. Begründen Sie, weshalb die relativen Extrempunkte des Graphen von f nicht absolut sein können.

- 18.2 Bestimmen Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ die Lage der Wendestellen von f und entscheiden Sie begründet, ob die Wendetangente des Graphen der Funktion f steigt oder fällt.

- 19 h sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Für die zugehörige erste Ableitungsfunktion gilt die Funktionsgleichung $h'(x) = x^2 + 1$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h' und begründen Sie damit, dass der Graph der Funktion h genau eine Nullstelle besitzt. Geben Sie außerdem einen möglichen Funktionsterm für h an. (Abitur 2020 Teil 1)

- 20 Eine ganzrationale Funktion g habe höchstens den Grad fünf. Die Tabelle zeigt das Krümmungsverhalten des Graphen G_g .

$x \in$	$]-\infty; 1]$	$[1; 4]$	$[4; \infty[$
G_g	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

Geben Sie die Wendestellen der Funktion g an und argumentieren Sie, welchen Grad g nur haben kann. (Abitur 2020 Teil 1)

- 21 Im Folgenden sind zwei Gleichungen gegeben. Lösen Sie die erste und zeigen Sie die Unlösbarkeit der zweiten. (Abitur 2020 Teil 1)

$$2x^4 - 18x^2 = 0$$

$$e^{x+1} + e^{x-1} = 0$$

22.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (2x^2 - 4) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

(Abitur 2020 Teil 2 AI)

22.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G_f bezüglich des Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von f für $|x| \rightarrow \infty$.

22.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.

(Teilergebnis: $f'(x) = (8x - 2x^3) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$)

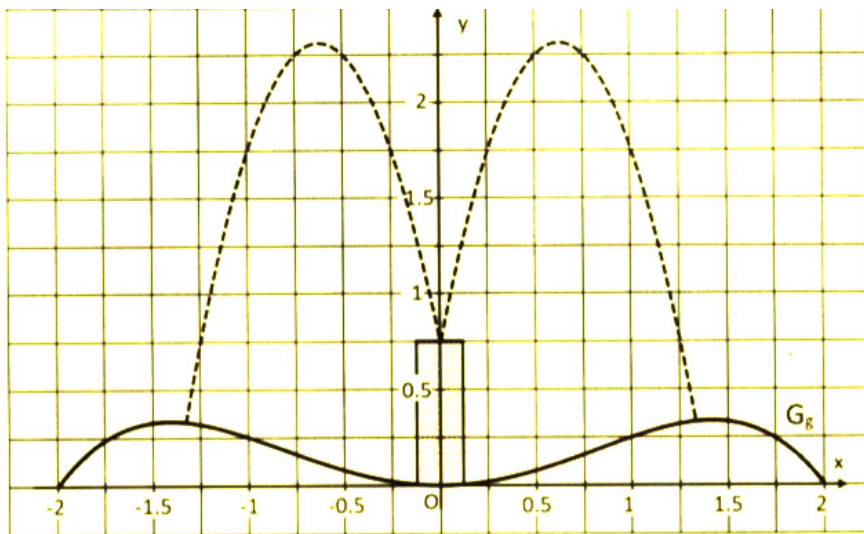
22.3 Stellen Sie die Gleichung der Tangente an G_f an der Stelle $x = 1$ in allgemeiner Form auf.

22.4 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 2 cm

22.5 Der Graph der Ableitungsfunktion von f und die x -Achse schließen im I. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems im Bereich $0 \leq x \leq 2$ ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks auf zwei Nachkommastellen gerundet.

22.6 Der Graph G_f und die Koordinatenachsen schließen im IV. Quadranten ein endliches Flächenstück ein.
Schätzen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks geeignet ab.

- 23.0 Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines Springbrunnens. Dieser hat eine kreisförmige Grundfläche mit einem Durchmesser von 4 m. Die Oberflächenlinie der im Querschnitt dargestellten Auffangwanne wird durch den Graphen G_g einer ganzrationalen Funktion g vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = [-2; 2]$ beschrieben. Der Graph G_g in einem kartesischen Koordinatensystem ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Meter dar. Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2020 Teil 2 AI)



- 23.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g . Entnehmen Sie dazu geeignete Werte aus der Zeichnung.

(Mögliches Teilergebnis: $g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$)

- 23.2.0 Die Wasserfontänen treten – wie in obiger Abbildung gestrichelt dargestellt – aus einer in der Mitte befindlichen Säule aus und beschreiben Parabelbahnen. Ihr Verlauf ist abhängig vom Wasserdruck.

Im Folgenden wird nur die rechte Wasserfontäne betrachtet.

Alle möglichen Wasserstrahlen lassen sich durch die Graphen der Funktionen p_a

mit $p_a(x) = -ax^2 + 5x + 0,75$ und $a \in \mathbb{R}^+$ darstellen.

- 23.2.1 Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Strahl im Punkt $A(1|0,25)$ auf die Auffangwanne trifft.

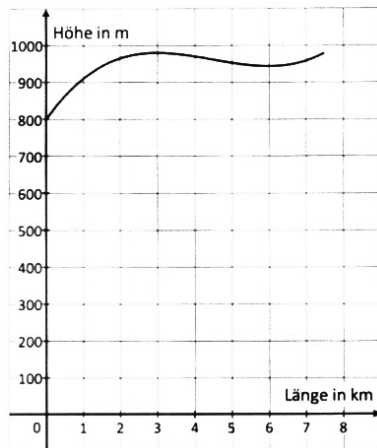
- 23.2.2 Berechnen Sie, bis zu welcher maximalen Höhe $h_{\max}$ die Auffangwanne gefüllt werden kann, bevor sie überläuft.

24.0 Ein Teilstück einer Langlaufloipe verläuft von oben betrachtet geradlinig und hat im Querschnitt das abgebildete Profil, welches annähernd durch den Graphen der

Funktion $f: x \mapsto 8 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100 \right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = [0; 7,5]$

beschrieben werden kann.

Die x-Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung an, auf der y-Achse ist die Höhe über dem Meeresspiegel aufgetragen. Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Kilometer bzw. Meter dar. (Abitur 2020 Teil 2 AII)



24.1 Ermitteln Sie die maximalen Teilintervalle von D_f , in denen die Loipe auf- bzw. abwärts verläuft.

24.2 Berechnen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe 15.1, in welcher horizontalen Entfernung vom Beginn des Teilstückes der Loipe maximale Höhe erreicht wird. Geben Sie an, in welcher Höhe Sporttreibende sich am höchsten Punkt der Loipe befinden.

24.3 Ermitteln Sie, nach wie vielen Kilometern in horizontaler Entfernung vom Ausgangspunkt die Loipe am steilsten abwärts verläuft.

23.4 Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Loipe in Prozent auf den ersten drei Kilometern.

24.5 Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 tritt im weiteren Verlauf der Loipe noch einmal auf. Berechnen Sie die Stelle, an der dies der Fall ist.

25.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 2 - 5e^{-0,1x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.
(Abitur 2020 Teil 2 AII)

25.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G_g bezüglich des Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von g für $|x| \rightarrow \infty$.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen G_g an.

25.2 Berechnen Sie die Nullstellen von g . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

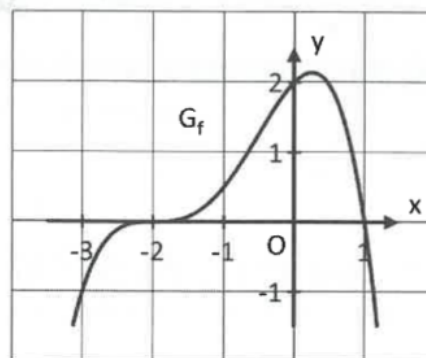
25.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_g .
Begründen Sie, warum dieser absolut ist und geben Sie die Wertemenge W_g der Funktion g an.

25.4 Stellen Sie die Gleichung der Tangente an G_g an der Stelle $x = 3$ in allgemeiner Form auf.

25.5 Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_g können auch ohne Verwendung der Ableitungsfunktion bestimmt werden. Begründen Sie dies mithilfe bekannter Ergebnisse.
Verwenden Sie dabei die Tatsache, dass nur höchstens ein Extrempunkt von G_g existiert.

25.6 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion g im Bereich $-7 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

26.0 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
(Abitur 2021 Teil 1)



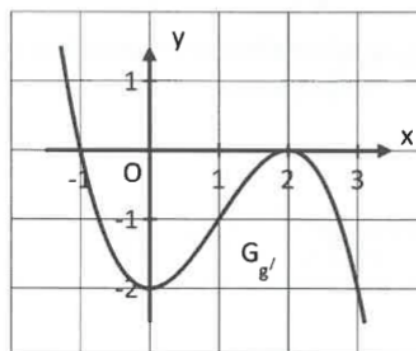
26.1 Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f sowie jeweils deren Vielfachheit an.
Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen einer Funktionsgleichung der Funktion f .
Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.

26.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen G_f , ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| a) $f'(0) = -\frac{1}{2}$ | b) $f''(1) < 0$ |
| c) $f''(-2) = f'(-2)$ | d) $W_f = \mathbb{R}$ |

27.0 g ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion g' .



27.1 Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion g Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte.

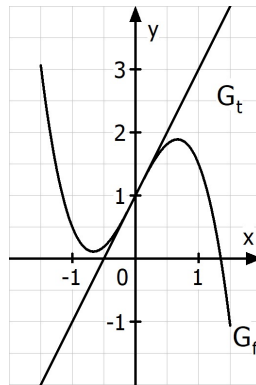
27.2 Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion g an.

28.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f: x \mapsto -1,5x^3 + 2x + 1$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
(Abitur 2021 AI)

28.1 Bestimmen Sie jeweils Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und begründen Sie, warum f nur eine einfache Nullstelle besitzt.

28.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Wendetangente t mit $t(x) = 2x + 1$ mit $D_t = \mathbb{R}$ im Bereich $-1,5 \leq x \leq 1,5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

28.3 Der Graph G_f , die Tangente G_t und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in nachfolgender Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2021 AI)



29.0 Der zeitliche Verlauf der Temperatur eines in einer großen Tasse eingeschenkten Frühstückstees wird in einem Schülerexperiment untersucht. Als Grundlage wird näherungsweise die Modellfunktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = a \cdot e^{bt} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verwendet. Dabei steht die Variable t für die Beobachtungszeit t in Minuten ab dem Beginn des Experiments, welches mit dem Eingießen des Tees in die Tasse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ startet. Der jeweilige Funktionswert von T gibt die Temperatur des Tees in $^{\circ}\text{C}$ zum Zeitpunkt t an. Der Tee in der Tasse hat zu Beginn des Experiments um 8:55 Uhr eine Temperatur von 80°C . Um 9:15 Uhr beträgt die Teetemperatur nur noch 30°C . Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2021 AI)

29.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b . Runden Sie gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Wert 22 im Funktionsterm der Funktion T für die Funktionswerte der Modellfunktion hat und bringen Sie diesen Wert in Zusammenhang mit dem durchgeführten Experiment.

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 58$; $b = -0,1$

29.2 Als angenehm wird eine Trinktemperatur von 54°C empfunden. Berechnen Sie, um welche Uhrzeit diese Trinktemperatur erreicht wird. Runden Sie die Zeitangabe auf ganze Minuten.

30.0 90% einer Rasenfläche sind vermoost. Das Moos soll mit einem umweltverträglichen Mittel zurückgedrängt werden. Die zeitliche Entwicklung der vom Moos bedeckten Rasenfläche wird näherungsweise mittels der Modellfunktion M mit der Funktionsgleichung $M(t) = a \cdot e^{bt}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschrieben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Ausbringung des Mittels. Der jeweilige Funktionswert von M gibt die gesamte mit Moos bedeckte Fläche in m^2 zum Zeitpunkt t an. Bekannt ist, dass zwei Tage nach der Ausbringung des Mittels noch 400 m^2 und nach neun Tagen nur noch 140 m^2 vermoost sind. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2021 AII)

30.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b . Runden Sie a ganzzahlig und b auf zwei Nachkommastellen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Rasenfläche.

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 540$; $b = -0,15$

30.2 Der Hersteller des umweltverträglichen Mittels wirbt damit, dass die mit Moos bedeckte Fläche nach der Ausbringung innerhalb einer Woche um ca. 65 % zurückgehen wird. Überprüfen Sie diese Werbeaussage, indem Sie berechnen, nach wie vielen Tagen diese Reduzierung laut dem Modell aus 30.0 erreicht wird. Runden Sie auf ganze Tage.

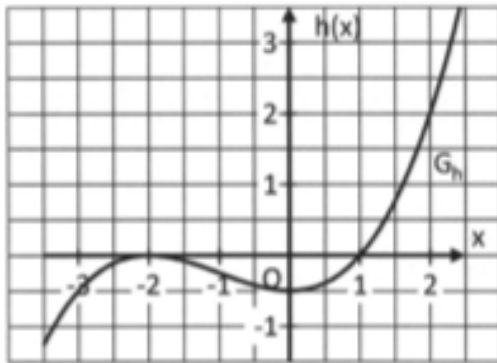
31.0 Gegeben ist die lineare Funktion $g: x \mapsto 3x - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet. (Abitur 2022 Teil 1)

31.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion g an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen G_g für $0 \leq x \leq 2$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

31.2 Berechnen Sie $\int_0^2 g(x) dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch bezüglich G_g .

32 Eine nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S(2|2k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörige quadratische Funktion $p_k: x \mapsto p_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie alle Werte von k , sodass die Parabel die x -Achse genau zweimal schneidet. (Abitur 2022 Teil 1)

- 33 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. (Abitur 2022 Teil 1)



Entscheiden Sie anhand des Graphen G_h , ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
 Die Nullstellen und die Extremstellen von h sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden.

- a) Es gilt: $h'(x) < 0$ für $x \in]-2; 1[$
- b) Der Graph der Stammfunktion H von h besitzt einen Terrassenpunkt.
- c) Es gilt: $h(-2) + h'(0) > 0$
- 34 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$ und der Definitionsmenge $D_f = [1; \infty[$.
 Bestimmen Sie die Wertemenge von f . (Abitur 2022 Teil 1)
- 35 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen.
 (Abitur 2022 Teil 1)
- $$(e^x - 2)^2 - 4 = 0$$
- 36 Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer Bakterienpopulation im Labor durch $B: t \mapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei steht die Variable t für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $B(t)$ für die Bakterienanzahl in einer Petrischale.
 Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik, deren Lösung auf die Gleichung $0,4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$ führt, und lösen Sie die Gleichung nach t_1 auf.

37.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2022 AI)

37.1 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f . Geben Sie die Wertemenge W_f an.

37.2 Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von f und entscheiden Sie begründet, ob es sich dabei um Stellen mit maximaler positiver bzw. maximaler negativer Steigung von G_f handelt oder nicht.

37.3 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -4x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade G_g Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $x = -2$ ist.

37.4 Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

38.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2022 AII)

38.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an.

38.2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{100}(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x)$ darstellen lässt.

38.3 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f . Geben Sie die Wertemenge W_f an.

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{25}(x-3)(x-10)(x-20)$)

38.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $0 \leq x \leq 24$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

39.0 Während das Bundesamt für Naturschutz seit 20 Jahren die Ausbreitung von Wölfen in Deutschland fördert, fordern u.a. Weidetierhalter und Jäger zunehmend eine Aufhebung des Abschussverbots von Wölfen. Um über die eventuelle Aufhebung dieses Verbots zu entscheiden, soll die Entwicklung der Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland modelliert werden. Die Entwicklung seit dem Jahr 2008 lässt sich näherungsweise durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{ct}$ mit $t, N_0, c \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, N_0 > 0, c > 0$ darstellen. Der Funktionswert von N gibt die Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die seit Ende des Jahres 2008 ($t_0 = 0$) vergangene Zeit in Jahren. Ende des Jahres 2013 wurden 18 Wolfsrudel in Deutschland gezählt. Ende 2017 lag die Zahl der Wolfsrudel bereits bei 60. (Abitur 2022 AI)

39.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter N_0 und c der Funktion N . Runden Sie N_0 ganzzahlig und c auf drei Nachkommastellen.

39.2.0 Im Folgenden gilt $N(t) = 4 \cdot e^{0,301t}$.

39.2.1 Das Bundesamt für Naturschutz geht davon aus, dass Deutschland maximal Lebensraum für 440 Rudel bieten kann. Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Wolfsrudel laut dem Modell aus 24.0 voraussichtlich diesen Wert erreicht.

39.2.2 Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion N in der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ ($b > 0$) an und folgern Sie daraus die prozentuale Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel pro Jahr. Runden Sie b auf drei Nachkommastellen.

40.0 Landwirte beklagen zunehmend Ernteaufschläge durch anhaltende Dürren in den Sommermonaten. Während der durchschnittliche Ertrag an Weizen pro Hektar Anbaufläche 2014 noch bei 86,3 Dezitonnen lag, brachte die Ernte von 2017 nur noch durchschnittlich 70,0 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche ein. Basierend auf den seit dem Jahr 2014 ausgewerteten Daten kann die Ertragsentwicklung vereinfacht durch die Funktion $E: x \mapsto 56,3 \cdot e^{-ct} + a$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+, c \in \mathbb{R}^-$ und $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. Der Funktionswert von E gibt den durchschnittlichen Weizenertrag in Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die vergangene Zeit in Jahren ab dem Jahr 2014 ($t_0 = 0$). Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2022 AII)

40.1 Ermitteln Sie den Mittelwert der jährlichen Abnahme des durchschnittlichen Weizenertrags pro Hektar Anbaufläche über die Jahre 2014 bis 2017.

40.2 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und c der Funktion E . Runden Sie c auf zwei Nachkommastellen.

40.3.0 Im Folgenden gilt: $E(t) = 56,3 \cdot e^{-0,11t} + 30$

40.3.1 Einige Landwirte sind der Meinung, dass der Weizenanbau ab einem durchschnittlichen Weizenenertrag von 50 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche nicht mehr rentabel für die ist. Berechnen Sie, ab welchem Jahr dies laut dem Modell der Fall wäre.

40.3.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von E für $t \rightarrow \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

40.3.3 Sofern Landwirte 2018 mit einem massiven Einbruch ihrer Weizenenerträge konfrontiert waren, hatten sie Anspruch auf Unterstützungszahlungen des Bundes. War ihr durchschnittlicher Weizenenertrag pro Hektar Anbaufläche um mehr als 30 % geringer als der Mittelwert der entsprechenden Erträge in den Jahren 2015, 2016 und 2017, so konnten sie einen Antrag auf Nothilfen stellen.
Prüfen Sie rechnerisch, ob sich gemäß dem hier gewählten mathematischen Modell eine Antragsberechtigung für Nothilfen ergibt.

41.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = [-3; 3]$.

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

(Abitur 2023 Teil 1)

41.1 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

41.2 Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g .

42.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit

$g(x) = -0,025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80)$ und der Definitionsmenge $D_g = [0; 7]$. Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

(Abitur 2023 All)

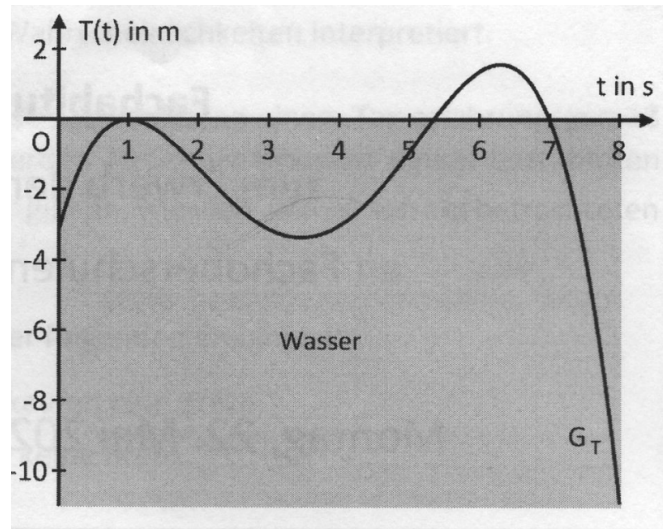
42.1 Bestimmen Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_g und geben Sie die Wertemenge W_g von g an.

42.2 Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $0 \leq x \leq 7$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab für die x-Achse: 1 LE = 1 cm, für die y-Achse: 1 LE = 2 cm

42.3 Der Graph G_g der Funktion g mit $g(x) = -0,025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80)$ mit $D_g = \mathbb{R}$, die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = 6$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. (Abitur 2023 All)

43.0 Das Auf- und Abtauchverhalten eines Delfins im Meer wird mittels eines an ihm angebrachten Sensors untersucht. Die momentane Höhe des Sensors in Metern bezogen auf die Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktionswerte der Funktion T beschreiben.

Der Graph der Funktion T wird mit G_T bezeichnet und ist im Zeitraum von 0 bis 8 Sekunden im nebenstehenden Koordinatensystem abgebildet.



Die Funktion T ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ befindet sich der Delfin an der Wasseroberfläche. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2023 AI)

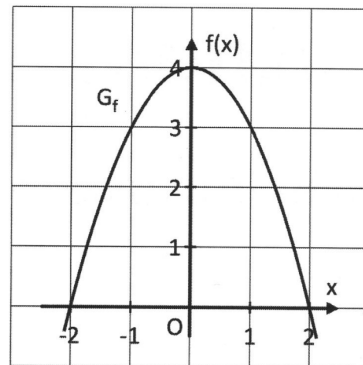
43.1 Beschreiben Sie anhand des Funktionsgraphen G_T den Bewegungsablauf des Delfins im Bereich von $t \approx 5,3$ bis $t = 7$ und erläutern Sie, ob für die Funktion T das Intervall $[0; \infty[$ für den beschriebenen Sachverhalt eine sinnvolle Definitionsmenge ist.

43.2 Der Leitkoeffizient im Funktionsterm von T ist gegeben durch $a = -\frac{1}{12}$. Zudem ist

bekannt, dass G_T den Schnittpunkt $S\left(0 \mid -\frac{28}{9}\right)$ mit der Ordinatenachse besitzt.

Die zwei ganzzahligen Nullstellen von T können der Zeichnung entnommen werden. Berechnen Sie den exakten Wert der fehlenden Nullstelle von T .

- 44.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f zweiten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. (Abitur 2023 Teil 1)



- 44.1 Der Graph der Funktion f und die x -Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

- 44.2 Die Funktion F mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f .

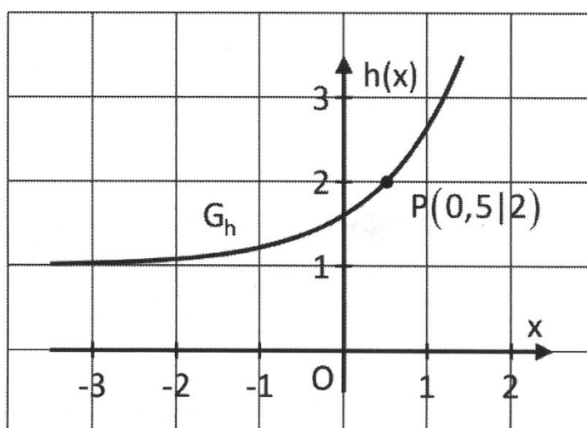
Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_F bezeichnet.

Beschreiben Sie den Globalverlauf des Graphen G_F mit Worten. Gehen Sie auch auf das Monotonieverhalten, die Lage und die Art der Extremstellen sowie auf die Lage der Wendestelle von F ein.

- 45.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer

Exponentialfunktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Der zugehörige

Funktionsterm besitzt die Form $h(x) = e^{x+d} + y_0$ mit $d, y_0 \in \mathbb{R}$. (Abitur 2023 Teil 1)



- 45.1 Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung nachvollziehbar die Werte der Parameter d und y_0 .

45.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen der Funktion h , ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen dazu in der Abbildung unter 45.0.

$$\int_{-1}^1 (2 - h(x)) dx > 0$$

46.0 Ein zu Beginn (Zeitpunkt $t_0 = 0$) $0,5 \text{ m}^2$ großer Algenteppich, der sich am Boden des Beckens mit der Grundfläche $A_0 = 188,69 \text{ m}^2$ gebildet hat, verdoppelt seine Fläche täglich. (Abitur 2023 AI)

46.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ auf, welche die Fläche des Algenteppichs in Quadratmetern in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen angibt. Für die Definitionsmenge der Funktion A gilt $D_A = [0; 8]$.

46.2 Zeigen Sie, dass sich die Wachstumsfunktion A näherungsweise durch die Funktionsgleichung $\tilde{A}(t) = 0,5 \cdot e^{0,6931t}$ mit $D_{\tilde{A}} = D_A$ darstellen lässt und berechnen Sie damit, nach wie vielen Tagen zwei Drittel der gesamten Grundfläche des Beckens von Algen bedeckt wären, wenn nicht eingegriffen würde. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Tage.

47.0 Beim Aufladen des Akkus eines Smartphones fließt ein Ladestrom von 2000 Milliampere. Sobald der Akku optimal geladen ist, verringert das Ladegerät den Ladestrom, um eine Überladung zu vermeiden.

Die Funktion I mit $I(t) = 2000 \cdot 0,5^{\frac{t}{488}}$ und $t \in D_I \subset \mathbb{R}$ modelliert den Verlauf des Ladestroms ab dem Erreichen der optimalen Akkuladung zur Zeit $t = 0$ bis zur endgültigen Abschaltung des Ladegeräts zur Zeit $t_{\text{end}} > 0$. Die Funktionswerte von I entsprechen der Stärke des Ladestroms in Milliampere und t entspricht der Zeit in Minuten. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2023 AII)

47.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm näherungsweise auch in der Form

$$\tilde{I}(t) = 2000 \cdot e^{-0,142t}$$

schreiben lässt.

47.2 Das Ladegerät schaltet sich komplett ab, wenn die Ladestromstärke auf 100 Milliampere abgesunken ist. Ermitteln Sie t_{end} unter Verwendung des Funktionsterms aus 27.1. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Minuten und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für $\tilde{I}$ an.

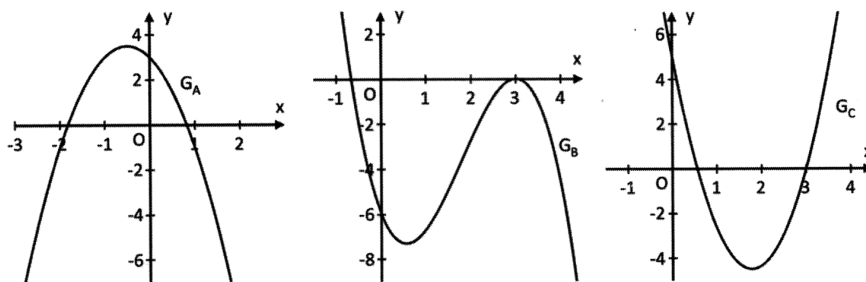
48.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 0,5(x-3)^2 \left(2x + \frac{4}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

(Abitur 2024 Teil 1)

48.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion k mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an und bestimmen Sie damit ein Intervall, in dem die x -Koordinate des lokalen Hochpunkts des Graphen der Funktion k liegt.

48.2 In der nachfolgenden Abbildung sind die Ausschnitte der Graphen G_A , G_B und G_C von in ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen dargestellt.

Entscheiden Sie begründet, welcher der drei Graphen G_A , G_B bzw. G_C zur Ableitungsfunktion von k gehört.



49.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2024 AI)

49.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f .

49.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

49.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-3 \leq x \leq 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

50.0 Die Funktion f lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$ mit $D_f = \mathbb{R}$ darstellen. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich. (Abitur 2024 AI)

50.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_g an G_f im Punkt $P(0|2)$.

50.2 Zeigen Sie, dass in keinem Punkt des Graphen G_f eine Tangente mit der Steigung $m = -2$ angelegt werden kann.

50.3 Ermitteln Sie die exakten Koordinaten des Wendepunkts von G_f .

51.0 Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Funktionsgleichungen $g(x) = 2 \cdot e^x - 1$ und $h(x) = e^{2x}$ mit den Definitionsmengen $D_g = D_h = \mathbb{R}$. (Abitur 2024 Teil 1)

51.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des einzigen gemeinsamen Punktes P der Graphen der beiden Funktionen g und h .

51.2 Der Graph der Funktion g wird an der x -Achse gespiegelt und anschließend um zwei Einheiten entlang der y -Achse nach oben verschoben. Der daraus entstandene neue Funktionsgraph gehört zur Funktion j .
Geben Sie einen Funktionsterm der Funktion j an.

52.0 In sogenannten Aluminiumhütten wird nach einem bestimmten Verfahren Aluminium aus Aluminiumoxid gewonnen. Die Temperatur vom Ausgangsstoff bis zum fertigen Endprodukt Aluminium während des Herstellungsprozesses kann modellhaft durch die Funktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = 250 \cdot t \cdot e^{-0,1t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Minuten ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$.
Der Funktionswert von T gibt die Temperatur in Grad Celsius zum Zeitpunkt t an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet.
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2024 AI)

52.1 Berechnen Sie die Temperatur im Herstellungsprozess nach fünf Minuten und die Temperatur, welche sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt.

52.2 Beim Erreichen des Temperaturmaximums liegt Aluminium in flüssiger Form vor. Es wird mittels eines Saugrohrs abgesaugt und kühlt anschließend ab.
Ermitteln Sie rechnerisch dieses Temperaturmaximum.

(mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0,1t} - 25 \cdot t \cdot e^{-0,1t}$)

52.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion T im Bereich $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. Entnehmen Sie anschließend dem Graphen den Zeitpunkt $t_{20\text{-fach}}$, zu dem die Temperatur im Abkühlvorgang dem 20-fachen der Anfangstemperatur entspricht.

52.4 Für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion T gilt ohne Nachweis $W(20 | T(20))$. Berechnen Sie $\dot{T}(20)$ und interpretieren Sie den Wert im Sinne der vorliegenden Thematik.

53.0 Beim Backen eines Roggenbrottes kann Sauerteig als Triebmittel für den Brotteig verwendet werden. Für den Sauerteig setzt man Mahl und Wasser im selben Verhältnis zueinander an. Milchsäurebakterien in Mehl und Wasser sorgen dafür, dass im Gemisch die notwendige Milchsäure entsteht.

Ein frisch angesetzter Sauerteig besitzt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einen pH-Wert (Säuregrad) von 6,0. Nach 40 Stunden hat der Sauerteig einen pH-Wert von 3,5.

Das Durchsäuern des Gemisches lässt sich näherungsweise durch die Funktion p mit der Funktionsgleichung $p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-kt}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $b, k \in \mathbb{R}$ beschreiben.

Dabei steht die Variable t für die Zeit in Stunden ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Der Funktionswert von p gibt den pH-Wert zum Zeitpunkt t an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2024 All)

53.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und k .

53.2.0 Im Folgenden gilt $p(t) = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056t}$.

53.2.1 Der Sauerteig kann ab einem pH-Wert von 4,0 dem Brotteig zugegeben werden. Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, ab welchem die Zugabe des Sauerteigs möglich ist. Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit des pH-Wertes zu diesem

Zeitpunkt. (mögliches Teilergebnis: $\dot{p}(t) = -0,1568 \cdot e^{-0,056t}$)

53.2.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

54.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{14}(x^3 - 12x^2 + 36x + 49)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2025 AI)

54.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen.

54.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .

54.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-1 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

54.4 Der Graph der Funktion f und die Gerade mit der Gleichung $x = 6$ schließen zusammen mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück im Koordinatensystem aus 54.3 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

55.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2025 All)

55.1 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow \pm\infty$ an.

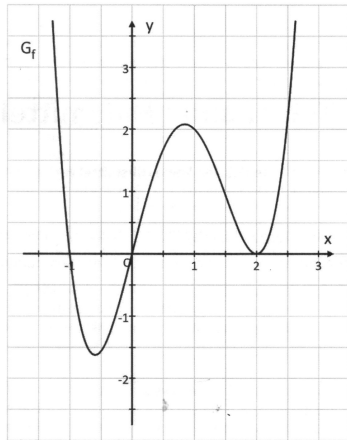
55.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der Punkte von G_f mit waagrechter Tangente.

55.3 Zeigen Sie, dass die Gerade G_g mit $g(x) = -x + \frac{5}{8}$ und $D_g = \mathbb{R}$ durch die beiden Wendepunkte von G_f verläuft.

55.4 Zeichnen Sie G_f und G_g unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer Geeigneter Funktionswerte für $-3 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 2 cm

55.5 Die Gerade G_g schließt mit G_f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem aus 55.4 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

56.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f vierten Grades. Die Funktion F bezeichne eine Stammfunktion von f . (Abitur 2025 Teil 1)



56.1 Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -0,5 BE und nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n. e.
$f''(-1) > 0$	☐	☐	☐
$f'(2) = f(2)$	☐	☐	☐
Die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle $x = -0,5$ ist negativ.	☐	☐	☐
F hat genau drei Nullstellen.	☐	☐	☐

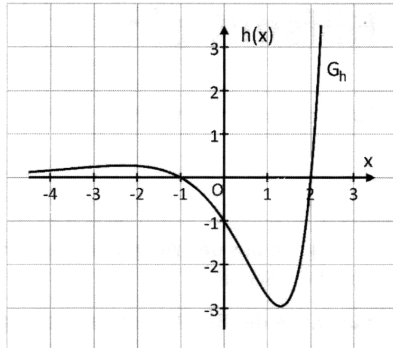
56.2 Skizzieren Sie in das gegebene Koordinatensystem von 48.0 einen möglichen Graphen der Stammfunktion F , welcher durch den Koordinatenursprung verläuft. Aus Ihrer Skizze soll – sofern vorhanden – Extrem- und Wendestellen des Graphen von F klar ersichtlich sein.

57 Gegeben ist die Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x \cdot e^{x-2}$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_t an den Graphen der Funktion h an der Stelle $x = 2$. (Abitur 2025 Teil 1)

58.0 Gegeben ist ein Ausschnitt des Graphen G_h der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G_h mit den Koordinatenachsen haben ganzzahlige Werte und können der Abbildung entnommen werden. (Abitur 2025 AI)



58.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b und c .

58.2 Die Funktion H mit der Definitionsmenge $D_H = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von h .
Deuten Sie $|H(2) - H(0)| \approx 4,19$ geometrisch in Bezug auf G_h .

59.0 Die Population eines bestimmten Bienenvolkes von Beginn des Monats März bis Ende Oktober kann näherungsweise durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,125t-0,2} + 5$ mit $t \in [0; 35]$ modelliert werden. Ab Ende Oktober verändert sich die Anzahl der Bienen in diesem Volk nach anderen Gesetzmäßigkeiten und soll im Folgenden nicht weiter betrachtet werden. Die Variable t im Funktionsterm steht für die seit Beobachtungsbeginn Anfang März ($t_0 = 0$) vergangene Zeit in Wochen. Der Funktionswert von N gibt die Anzahl der Bienen in Tausend zum Zeitpunkt t an. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2025 AI)

59.1 Geben Sie die Anzahl der Bienen zu Beobachtungsbeginn an und berechnen Sie, wie viele Bienen das Volk fünf Wochen nach Beobachtungsbeginn zählt.

59.2 Ermitteln Sie, nach wie vielen Wochen die Anzahl der Bienen im Beobachtungszeitraum das absolute Maximum erreicht hat und berechnen Sie diese maximale Bienenanzahl.

(mögliches Teilergebnis: $\dot{N}(t) = e^{-0,125t-0,2} (-0,25t^2 + 4t)$)

59.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion N im angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Graphen nachvollziehbar den Monat, in welchem die Anzahl der Bienen im Volk erstmals 50000 beträgt.
Maßstab: 4 Wochen = 1 cm; 10000 Bienen = 1 cm

59.4 An der Stelle $t_w \approx 4,7$ ändert der Graph der Funktion N sein Krümmungsverhalten von einer Links- in eine Rechtskrümmung. Weiterhin gilt $\dot{N}(t_w) \approx 6,04$. Interpretieren Sie die beiden Werte im Sachzusammenhang.

60.0 Die Körpertemperatur einer an einem grippalen Infekt erkrankten Person kann vereinfacht durch die Modellfunktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = 36,5 + 2t \cdot e^{-0,25t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab Auftreten der ersten Symptome zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und $T(t)$ für die Körpertemperatur in $^{\circ}\text{C}$ zum Zeitpunkt t .

Auf das Mitführen von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle. (Abitur 2025 All)

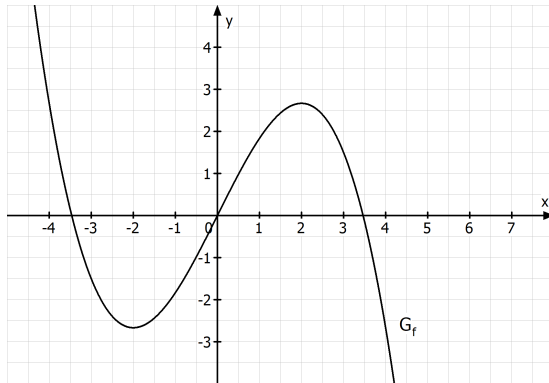
60.1 Untersuchen Sie, welche Temperatur sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt.

60.2 Ermitteln Sie rechnerisch, welche maximale Körpertemperatur die erkrankte Person nach diesem Modell erreicht.

(mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 2 \cdot e^{-0,25t} (1 - 0,25t)$)

Lösungen

1.1



$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

1.2 $G_{f'}$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.

$G_{f'}$ hat zwei Nullstellen bei $x = -2$ und $x = 2$, der Extrempunkt von f' muss bei $x = 0$ liegen und $G_{f'}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

2.1 G_f hat eine Nullstelle bei 0 und bei $x = 0$ eine Steigung von 0. G_f hat bei $x = -3$ einen Funktionswert von -3 und bei $x = -3$ eine Steigung von -1.

2.2

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(I) \quad f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$(II) \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(III) \quad f(-3) = -3 \Rightarrow -27a + 9b = -3$$

$$(IV) \quad f'(-3) = -1 \Rightarrow 27a - 6b = -1$$

$$(III) + (IV) \Rightarrow 3b = -4 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

$$(IV) \Rightarrow 27a + 8 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$$

2.3.1

$$g'(x) = -x^2 - \frac{8}{3}x \Rightarrow -x^2 - \frac{8}{3}x = 0 \Rightarrow x \left(-x - \frac{8}{3} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{8}{3}$$

Skizze von g' :

$$\Rightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ TIP } \text{TIP} \left(-\frac{8}{3} / -\frac{256}{81} \right) \quad x = 0 \text{ HOP } \text{HOP}(0/0)$$

$$x = -4,5 \text{ Randmaximum } (-4,5 / 3,375)$$

$$x = 1 \text{ Randminimum } \left(1 / -\frac{5}{3} \right)$$

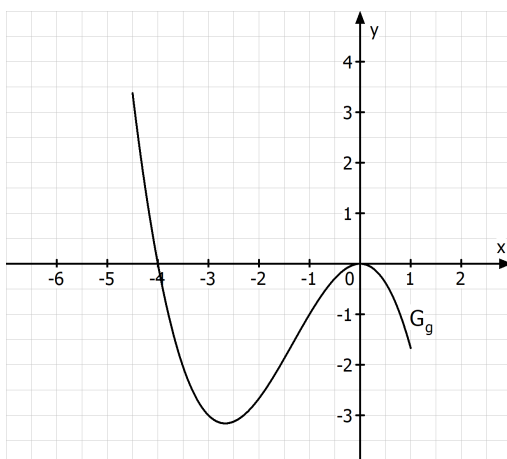
$$\Rightarrow W_g = \left[-\frac{256}{81}; 3,375 \right]$$

$$g''(x) = -2x - \frac{8}{3} \quad -2x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

2.3.2 $x = -\frac{4}{3}$ ist eine einfache Nullstelle von $g'' \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow \text{WP}$

$$\text{WP} \left(-\frac{4}{3} / -\frac{128}{81} \right)$$

$$2.3.3 \quad -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 \cdot (x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -4$$



3.1

$$w(t) = at^4 + bt^3 + c$$

$$(I) \quad w(0) = 200 \Rightarrow c = 200$$

$$(II) \quad w(30) = 308 \Rightarrow 810000a + 27000b + c = 308$$

$$(III) \quad w'(24) = 0 \quad w'(t) = 4at^3 + 3bt^2 \\ \Rightarrow 55296a + 1728b = 0$$

$$(II) \quad 810000a + 27000b = 108$$

$$(III) \quad 55296a + 1728b = 0 \Rightarrow b = -32a$$

$$(II) \Rightarrow 810000a - 864000a = 108 \Rightarrow a = -\frac{1}{500}$$

$$\Rightarrow b = -32 \cdot \left(-\frac{1}{500}\right) = \frac{8}{125}$$

$$\Rightarrow w(t) = -\frac{1}{500}t^4 + \frac{8}{125}t^3 + 200$$

3.2

$$w(24) = 421 \text{ cm}$$

3.3

$$w'(t) = -\frac{4}{500}t^3 + \frac{24}{125}t^2 \quad w''(t) = -\frac{12}{500}t^2 + \frac{48}{125}t$$

$$-\frac{12}{500}t^2 + \frac{48}{125}t = 0 \Rightarrow t \cdot \left(-\frac{12}{500}t + \frac{48}{125}\right) \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 16$$

Skizze von w'' :

$$\Rightarrow t = 16 \text{ Maximum von } w'$$

Da w' im Bereich $[0;30]$ nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ absolutes Maximum für $t = 16$
 $\Rightarrow$ am 17. März 2010 war die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten.

4.1

$$x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

$$\Rightarrow N_1(0|0) \quad N_2(-3|0)$$

4.2

$$g'(x) = 3x^2 + 6x \quad g''(x) = 6x + 6$$

$$6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Skizze von g'' :

$$\Rightarrow x = -1 \text{ WP} \quad y_{\text{WP}} = g(-1) = 2$$

$$\Rightarrow y = mx + t \quad m = g'(-1) = -3$$

$$\Rightarrow 2 = -3 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow y = -3x - 1$$

5.1 $g(-x) = e^{0,25(-x)} - e^{-0,25(-x)} = e^{-0,25x} - e^{0,25x} = -g(x)$

G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$\int_{-2}^2 g(x) dx = 0$$

5.2

$$g'(x) = e^{0,25x} \cdot 0,25 - e^{-0,25x} \cdot (-0,25) = e^{0,25x} \cdot 0,25 + e^{-0,25x} \cdot 0,25$$

$$g'(0) = 0,5 \quad g(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = 0,5x$$

6.1

$$x^2 \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x^2 \cdot e^{-x} \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty \quad x^2 \cdot e^{-x} \rightarrow 0_+ \quad (\text{e-Funktion überwiegt})$$

6.2

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

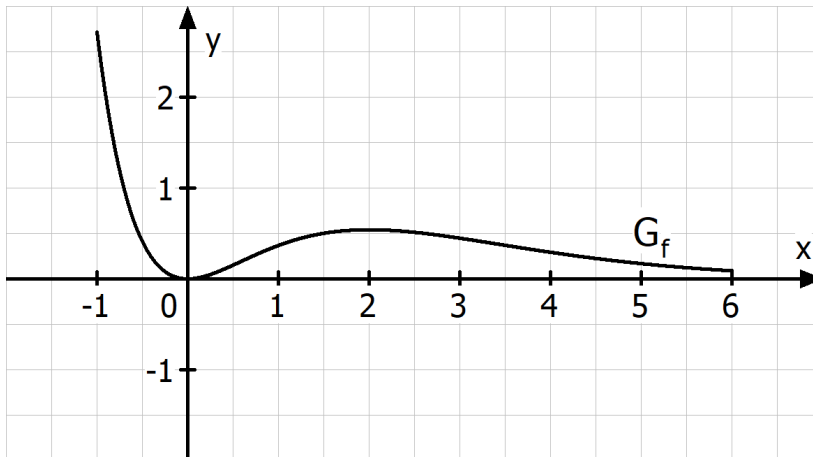
Skizze von f' : e^{-x} immer positiv

Skizze von $(2x - x^2)$:

$$\Rightarrow G_f \text{ sms in }]-\infty; 0] \text{ sowie in } [2; \infty[\quad G_f \text{ smf in } [0; 2]$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(0/0) \quad x = 2 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(2/4e^{-2})$$

6.3



7.1

t in Stunden	0	1	2	3	4
H(t) in Gramm	0,5	1	2	4	8

7.2 $H(t) = 0,5 \cdot 2^t$

8

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x - 1 > -1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

9.1

$$y\text{-Achse: } f(0) = 2 \cdot (0-2)^2 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} = 8 \Rightarrow S_y(0|8)$$

$$x\text{-Achse: } f(x) = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 = 0 \text{ (} e^{-0,5x} \text{ immer positiv)} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow N(2|0)$$

$$x \rightarrow \infty \quad \underbrace{2(x-2)^2}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \text{ (weil die e-Funktion überwiegt)}$$

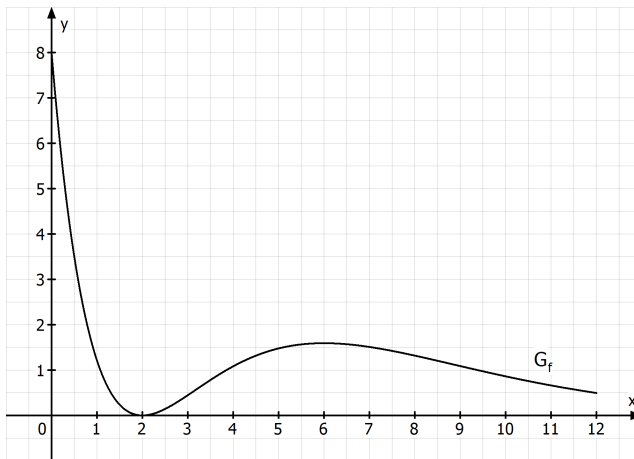
$$x \rightarrow -\infty \quad \underbrace{2(x-2)^2}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{\rightarrow \infty} \rightarrow \infty$$

9.2

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2 \cdot \left[(2x-4) \cdot e^{-0,5x} + (x^2-4x+4) \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) \right] = \\
 &= 2e^{-0,5x} \cdot (2x-4-0,5x^2+2x-2) = 2e^{-0,5x} \cdot (-0,5x^2+4x-6) \\
 f'(x) &= 0 \Rightarrow -0,5x^2+4x-6=0 \quad (2e^{-0,5x} \text{ immer positiv}) \Rightarrow x_1=6 \quad x_2=2 \\
 &\text{Skizze von } f' : 2e^{-0,5x} \text{ immer positiv} \\
 &\text{Skizze von } (-0,5x^2+4x-6):
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x=2 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(2|0) \quad x=6 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(6|1,59)$$

9.3



Wendestellen befinden sich in I_2 und I_3 , da sich zwischen zwei Extrempunkten mindestens eine Wendestelle befinden muss und auch zwischen einem Hochpunkt und einer waagrechten Asymptote mindestens eine Wendestelle liegen muss.

10 $H(2) - H(0) = 4 - 3 = 1$

Der Wert ist die Maßzahl des Flächeninhalts, den G_h mit der y-Achse im Bereich $[0;2]$ einschließt.

11
$$A = - \int_{-4}^0 g(x) dx = - \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{9}x^3 \right]_{-4}^0 = - \left[(0) - \left(\frac{64}{9} \right) \right] = \frac{64}{9}$$

12
$$\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} w(t) dt = \frac{1}{30} \left[-\frac{1}{500} \cdot \left(\frac{1}{5}t^5 - 8t^4 - 100000t \right) \right]_0^{30} = \frac{1}{30} \cdot 9240 = 308$$

Der durchschnittliche Wasserstand im gesamten Beobachtungszeitraum der 30 Tage lag bei 308 cm.

13

- A. Falsch. G_f hat bei $x = 4$ einen Extrempunkt $\Rightarrow G_{f'}$ hat bei $x = 4$ eine Nullstelle
 B. Richtig. G_f ist in $[0;4]$ smf
 C. Richtig. G_f sms in $[-1;2]$ $\Rightarrow F' = f > 0$ in $[-1;2]$
 D. Richtig. Wendepunkte von G_f sind die Extrempunkte von $G_{f'} = G_f$

14.1

$$h'(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x$$

$$-\frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 = 2 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = \sqrt{2}$$

Skizze von h' :

$$\Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{ HOP} \quad x = 0 \text{ TIP} \quad x = \sqrt{2} \text{ HOP}$$

$$h(\pm\sqrt{2}) = \frac{4}{3} \quad h(0) = 0$$

$$\Rightarrow h_{\max} = \frac{4}{3} \text{ dm}$$

14.2

Schnittstellen zwischen G_h und $y = 1$: $x = -1$ $x = 1$ (aus Zeichnung)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_{-1}^1 (1 - h(x)) dx &= \int_{-1}^1 \left(1 - \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 1\right)\right) dx = \left[\frac{1}{15}x^5 - \frac{4}{9}x^3 + x\right]_{-1}^1 = \\
 &= \frac{28}{45} - \left(-\frac{28}{45}\right) = \frac{56}{45} \approx 1,24 \text{ dm}^2
 \end{aligned}$$

15.1

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= 4t \cdot e^{-0,5t} + 2t^2 \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = e^{-0,5t} \cdot (4t - t^2) \\ e^{-0,5t} \cdot (4t - t^2) &= 0 \Rightarrow 4t - t^2 = 0 \Rightarrow t(4 - t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 4 \end{aligned}$$

Skizze von $\dot{N}$: $e^{-0,5t}$ immer positiv

Skizze von $(4t - t^2)$:

$\Rightarrow$ Maximum für $t = 4$

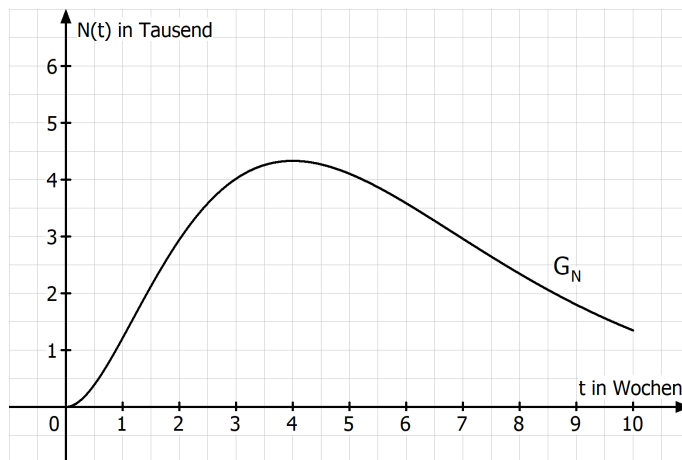
Da N im Bereich $[0; \infty[$ nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ absolutes Maximum für $t = 4$
 $N(4) = 4,33$

Nach vier Wochen ist die Zahl der neu erkrankten Menschen mit 4330 am größten.

15.2 $t \rightarrow \infty \quad 2t^2 \cdot e^{-0,5t} \rightarrow 0_+$ (weil e-Funktion überwiegt)

Langfristig wird es keine Neuerkrankungen mehr geben.

15.3



15.4

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= (-8t - 16) \cdot e^{-0,5t} + (-4t^2 - 16t - 32) \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = \\ &= e^{-0,5t} \cdot (-8t - 16 + 2t^2 + 8t + 16) = e^{-0,5t} \cdot 2t^2 = N(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow G$ ist Stammfunktion von N

$$\int_0^8 N(t) dt = \left[(-4t^2 - 16t - 32) \cdot e^{-0,5t} \right]_0^8 = (-416 \cdot e^{-4}) - (-32) = 24,38$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \cdot 24,38 = 3,05$$

Durchschnittlich gab es in den ersten acht Wochen etwa 3050 Neuerkrankungen.

16.1

$$\frac{46,79 - 10}{2 - 0} = 18,395$$

In den ersten beiden Stunden beträgt die durchschnittliche Zunahme der Bakterien etwa 18395 pro Stunde.

16.2

$$k'_{III}(t) = 50 \cdot e^{-0,5t} + 50t \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = e^{-0,5t} \cdot (50 - 25t)$$

$$k'_{III}(4) = e^{-2} \cdot (50 - 100) = -6,767$$

$$-6,767 \cdot 1000 : 60 = -112,78$$

⇒ Die Angabe ist nahezu richtig.

16.3

$$k_{II}(4) = 50 \Rightarrow 50 \cdot 4 \cdot e^{-a_2 \cdot 4} + 10 = 50 \Rightarrow e^{-a_2 \cdot 4} = 0,2 \Rightarrow -4a_2 = \ln(0,2) \Rightarrow a_2 = \frac{\ln(0,2)}{-4} = 0,40$$

Je größer a ist, desto wirksamer ist das Gift.

17.1

$$N(2) = 3e^{-0,2} \approx 2,456$$

Nach diesem Modell befinden sich um 12 Uhr 2456 Besucher im Tierpark.

$$0,9 \cdot 2456 \approx 2210 \quad 1,1 \cdot 2456 \approx 2702$$

Die tatsächliche Besucherzahl um 12 Uhr muss im Intervall $[2210; 2702]$ liegen.

17.2.1

$$\frac{1}{4}(8t - t^2) \cdot e^{-0,4t-1} \geq 4 \Rightarrow t \in [2,8; 7,8] \text{ (nach Zeichnung)}$$

⇒ Die Eisdiele ist zwischen 12:48 Uhr und 17:48 Uhr rentabel.

17.2.2

$$\begin{aligned}
 \dot{N}(t) &= \frac{1}{4} \left[(8-2t)e^{0,4t-1} + (8t-t^2)e^{0,4t-1} \cdot (0,4) \right] = \\
 &= \frac{1}{4} e^{0,4t-1} (8-2t+3,2t-0,4t^2) = \frac{1}{4} e^{0,4t-1} (-0,4t^2+1,2t+8)
 \end{aligned}$$

$$\dot{N}(t) = 0 \Rightarrow -0,4t^2 + 1,2t + 8 = 0 \quad \left(\frac{1}{4} e^{0,4t-1} \text{ immer positiv} \right)$$

$$\Rightarrow (t_1 \approx -3,22) \notin D \quad t_2 \approx 6,22$$

Skizze von $\dot{N}$: $\frac{1}{4} e^{0,4t-1}$ immer positiv

Skizze von $(-0,4t^2 + 1,2t + 8)$:

$$\Rightarrow t \approx 6,22 \text{ Maximum}$$

Da für $t \in \mathbb{R}_0^+$ nur ein Extremum (Maximum) auftritt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow t \approx 6,22 \text{ absolutes Maximum}$$

$$N_{\max} = N(6,22) \approx 12,257 \Rightarrow 12257 \text{ Besucher}$$

18.1

G_f ist in $]-\infty; -1]$ sms, da $f'(x) \geq 0$

G_f ist in $[-1; 2]$ smf, da $f'(x) \leq 0$

G_f ist in $[2; \infty[$ sms, da $f'(x) \geq 0$

$f'(-1) = 0$ VZW $+\rightarrow - \Rightarrow$ Maximalstelle

$f'(2) = 0$ VZW $- \rightarrow + \Rightarrow$ Minimalstelle

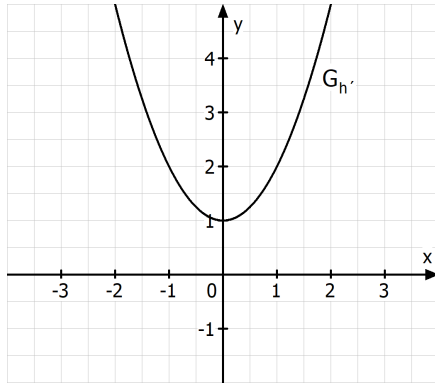
G_f geht von links unten nach rechts oben und deshalb gibt es Funktionswerte, die größer bzw. kleiner sind als die Funktionswerte der Extrempunkte.

18.2

$x = 0,5$ (x-Koordinate des TIP von $G_{f'}$)

$f'(0,5) < 0 \Rightarrow$ die Wendetangente fällt

19



$h'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow G_h$ steigt auf ganz $\mathbb{R}$ und ist eine Funktion dritten Grades
 $\Rightarrow h$ hat genau eine Nullstelle

$$h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$$

20

Wendestellen: $x_1 = 1$ $x_2 = 4$

g'' hat zwei Nullstellen mit VZW $\Rightarrow g''$ hat mindestens Grad 2

$\Rightarrow g$ hat mindestens Grad 4

Laut Angabe hat die Funktion höchstens Grad 5, aber dann hätte

g'' Grad 3. Eine Funktion vom Grad 3 kann nur eine einfache, eine einfache und eine doppelte oder drei einfache Nullstellen haben und somit kann g nicht den Grad 5 haben.

g hat Grad 4;

21

$$2x^4 - 18x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_2 = -3 \quad x_3 = 3$$

$e^{x+1} + e^{x-1} = 0$ unlösbar, weil e^{x+1} und e^{x-1} immer positiv sind und damit auch die Summe niemals null werden kann.

22.1

$$f(-x) = [2 \cdot (-x)^2 - 4] \cdot e^{-0,5(-x)^2 - 1} = (2x^2 - 4) \cdot e^{-0,5x^2 - 1} = f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$$x \rightarrow \infty \quad \underbrace{(2x^2 - 4)}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x^2 - 1}}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow 0^+ \quad (\text{e-Funktion überwiegt})$$

$$x \rightarrow -\infty \quad \underbrace{(2x^2 - 4)}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x^2 - 1}}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow 0^+$$

22.2

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x \cdot e^{-0,5x^2-1} + (2x^2 - 4) \cdot e^{-0,5x^2-1} \cdot (-x) = \\
 &= e^{-0,5x^2-1} \cdot (4x - 2x^3 + 4x) = e^{-0,5x^2-1} \cdot (8x - 2x^3) \\
 f'(x) &= 0 \Rightarrow 8x - 2x^3 = 0 \quad (e^{-0,5x^2-1} \text{ immer positiv}) \\
 &\Rightarrow x(8 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\
 &\quad 8 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_2 = -2 \quad x_3 = 2
 \end{aligned}$$

Skizze von f' : $e^{-0,5x^2-1}$ immer positiv

Skizze von $(8x - 2x^3)$:

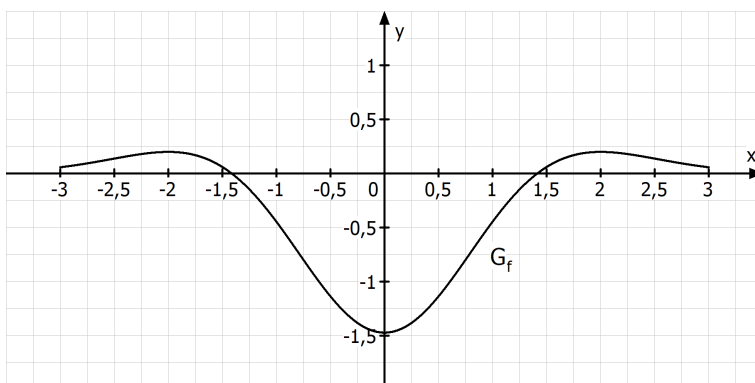
$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow x = -2 \text{ HOP} \text{ HOP}(-2|0,2) \quad x = 0 \text{ TIP} \text{ TIP}(0|-1,47) \quad x = 2 \text{ HOP} \text{ HOP}(2|0,2) \\
 &\Rightarrow W_f = [-1,47; 0,2]
 \end{aligned}$$

22.3

$$\begin{aligned}
 y &= mx + t \\
 m &= f'(1) = (8 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3) \cdot e^{-0,5 \cdot 1^2 - 1} = 6e^{-1,5} \\
 y &= 6e^{-1,5} \cdot x + t \quad f(1) = (2 \cdot 1 - 4) \cdot e^{-0,5 \cdot 1^2 - 1} = -2e^{-1,5} \\
 &\Rightarrow -2e^{-1,5} = 6e^{-1,5} \cdot 1 + t \Rightarrow t = -8e^{-1,5} \\
 &\Rightarrow y = 6e^{-1,5} \cdot x - 8e^{-1,5}
 \end{aligned}$$

22.4

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \quad (\text{da } e^{-0,5x^2-1} \text{ immer positiv}) \\
 &\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$



22.5

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 f'(x) dx &= \left[(2x^2 - 4) \cdot e^{-0,5x^2-1} \right]_0^2 = 4e^{-3} - (-4e^{-1}) \approx 1,67 \\
 &\Rightarrow A \approx 1,67
 \end{aligned}$$

$$22.6 \quad A \approx \frac{2\sqrt{2}}{e} \approx 1,04 \quad \text{z.B. durch Kästchen zählen}$$

23.1

$$g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\text{Achsensymmetrie: } b = d = 0 \Rightarrow g(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

$$(I) \quad g(0) = 0 \Rightarrow e = 0$$

$$(II) \quad g(2) = 0 \Rightarrow 16a + 4c = 0$$

$$(III) \quad g(1) = 0,25 \Rightarrow a + c = 0,25$$

$$(III) \Rightarrow a = 0,25 - c$$

$$(II) \Rightarrow 16(0,25 - c) + 4c = 0 \Rightarrow -12c + 4 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = 0,25 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$$

$$23.2.1 \quad 0,25 = -a \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 0,75 \Rightarrow 0,25 = -a + 5,75 \Rightarrow a = 5,5$$

23.2.2

$$g'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = \sqrt{2}$$

Skizze von g' :

$$\Rightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{HOP} \quad \text{HOP}\left(\sqrt{2} \mid \frac{1}{3}\right)$$

Da g im positiven Bereich nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow$ absolutes Maximum für $x = \sqrt{2}$

Die Auffangwanne kann bis zu einer Höhe von $\frac{1}{3}$ m befüllt werden, bevor sie überläuft.

24.1

$$f'(x) = 8 \cdot (x^2 - 9x + 18)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 3$$

Skizze von f' :

$\Rightarrow$ Loipe geht bergauf für $x \in [0; 3]$ sowie für $x \in [6; 7,5]$

Loipe geht bergab für $x \in [3; 6]$

24.2

Relatives Maximum für $x = 3 \Rightarrow \text{HOP}(3|980)$

Randmaximum für $x = 7,5 \Rightarrow \text{RM}(7,5|980)$

Die maximale Höhe von 980 m wird sowohl nach 3 km als auch nach 7,5 km erreicht.

24.3

$$f''(x) = 8(2x - 9)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 9 = 0 \Rightarrow x = 4,5$$

Skizze von f'' :

$\Rightarrow x = 4$ WEP (Minimum von f') $f'(4) = -0,25 < 0$

$\Rightarrow$ nach 4 km verläuft die Loipe am steilsten abwärts;

$$24.4 \quad m = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{980 - 800}{3} = 60 \frac{\text{m}}{\text{km}} \Rightarrow \frac{60}{1000} = 6 \%$$

24.5

$$f'(x) = 8(x^2 - 9x + 18) \quad f'(2) = 32$$

$$8(x^2 - 9x + 18) = 32 \Rightarrow 8x^2 - 72x + 112 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 \quad x_2 = 2$$

Bei Kilometer 7 tritt nochmal die gleiche Steigung wie bei Kilometer 2 auf.

25.1

$$g(-x) = 2 - 5e^{-0,1(-x)^2} = 2 - 5e^{-0,1x^2} = g(x)$$

$\Rightarrow G_g$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$$x \rightarrow +\infty \quad 2 - \underbrace{5e^{-0,1x^2}}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow 2$$

$$x \rightarrow -\infty \quad 2 - \underbrace{5e^{-0,1x^2}}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow 2$$

$\Rightarrow$ Asymptote: $y = 2$

25.2

$$2 - 5e^{-0,1x^2} = 0 \Rightarrow 5e^{-0,1x^2} = 2 \Rightarrow e^{-0,1x^2} = 0,4$$

$$\Rightarrow -0,1x^2 = \ln(0,4) \Rightarrow x^2 = \frac{\ln(0,4)}{-0,1} \approx 9,16 \Rightarrow x_1 \approx 3,03 \quad x_2 \approx -3,03$$

25.3

$$g'(x) = -5 \cdot e^{-0,1x^2} \cdot (-0,2x) = x \cdot e^{-0,1x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (e^{-0,1x^2} \text{ immer positiv})$$

Skizze von g' : $e^{-0,1x^2}$ immer positiv

Skizze von x :

$$\Rightarrow x = 0 \text{ TIP } \text{TIP}(0|-3)$$

$x = 0$ muss auch das absolute Minimum sein, weil keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens vorliegt.

$$\Rightarrow W_g = [-3; 2]$$

25.4

$$t: y = mx + t$$

$$m = g'(3) = 3e^{-0,9} \quad g(3) = 2 - 5e^{-0,9}$$

$$\Rightarrow 2 - 5e^{-0,9} = 3e^{-0,9} \cdot 3 + t \Rightarrow t = 2 - 14e^{-0,9}$$

$$\Rightarrow t: y = 3e^{-0,9} \cdot x + 2 - 14e^{-0,9}$$

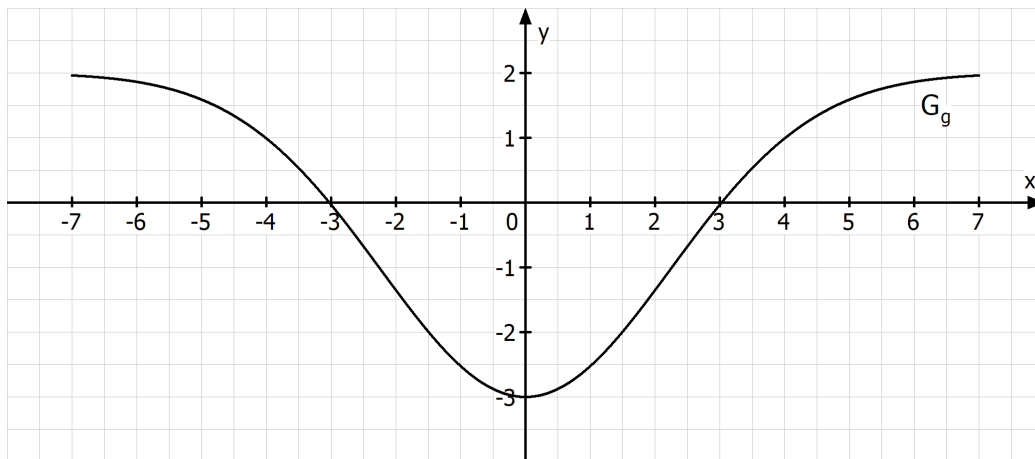
25.5

Weil G_g achsensymmetrisch zur y-Achse ist und g keine konstante Funktion ist,

muss bei $x = 0$ ein Extrempunkt liegen (nach Angabe einziger Extrempunkt).

Wegen der Asymptote bei $y = 2$ und Nullstellen bei $x = \pm 3,03$, muss $x = 0$ ein TIP sein.

25.6



26.1

$$x_1 = -2 \text{ (dreifach)} \quad x_2 = 1 \text{ (einfach)}$$

$$f(x) = a \cdot (x+2)^3 \cdot (x-1)$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow a \cdot 2^3 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow a = -0,25$$

$$\Rightarrow f(x) = -0,25 \cdot (x+2)^3 \cdot (x-1)$$

26.2

- a) Falsch. $f'(0) > 0$
- b) Richtig. G_f bei $x = 1$ rechtsgekrümmt.
- c) Richtig. G_f hat bei $x = -2$ Terrassenstelle.
- d) Falsch. G_f hat einen absoluten Hochpunkt.

27.1 $x_1 = -1$ HOP $x_2 = 2$ TEP

27.2

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

Wendestellen sind die Extremstellen von g' .

28.1

$$f'(x) = -4,5x^2 + 2$$

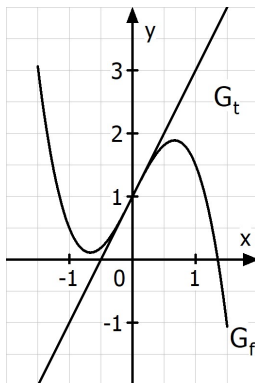
$$\Rightarrow -4,5x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

Skizze von f' :

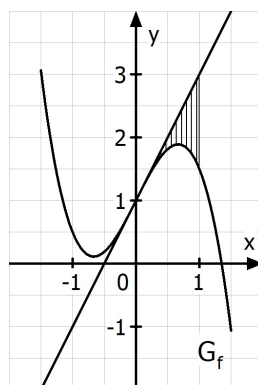
$$\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \text{ TIP} \quad \text{TIP}\left(-\frac{2}{3} \mid \frac{1}{9}\right) \quad x_2 = \frac{2}{3} \text{ HOP} \quad \text{HOP}\left(\frac{2}{3} \mid \frac{17}{9}\right)$$

Da beide Extrempunkte oberhalb der x-Achse liegen und f eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist, kann f nur eine einfache Nullstelle besitzen.

28.2



28.3



$$A = \int_0^1 (t(x) - f(x)) dx = \int_0^1 1,5x^3 dx = \left[\frac{3}{8}x^4 \right]_0^1 = \frac{3}{8} - 0 = \frac{3}{8}$$

29.1

$$T(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 22$$

$$T(0) = 80 \Rightarrow a \cdot 1 + 22 = 80 \Rightarrow a = 58$$

$$T(20) = 30 \Rightarrow 58 \cdot e^{20b} + 22 = 30 \Rightarrow 58 \cdot e^{20b} = 8 \Rightarrow e^{20b} = \frac{4}{29}$$

$$\Rightarrow 20b = \ln\left(\frac{4}{29}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{20} \cdot \ln\left(\frac{4}{29}\right) \approx -0,1$$

Für große Werte von t nähert sich $T(t)$ 22 an. Langfristig wird sich eine Teetemperatur von 22 °C einstellen.

29.2

$$54 = 58 \cdot e^{-0,1t} + 22 \Rightarrow 58 \cdot e^{-0,1t} = 32 \Rightarrow e^{-0,1t} = \frac{16}{29}$$

$$\Rightarrow -0,1t = \ln\left(\frac{16}{29}\right) \Rightarrow t = -10 \cdot \ln\left(\frac{16}{29}\right) \approx 6$$

$\Rightarrow$ etwa um 9:01 Uhr wird die Temperatur von 54 °C erreicht.

30.1

$$M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$$

$$(I) M(2) = 400 \Rightarrow a \cdot e^{2b} = 400$$

$$(II) M(9) = 140 \Rightarrow a \cdot e^{9b} = 140$$

$$(I) \Rightarrow a = \frac{400}{e^{2b}}$$

$$(II) \Rightarrow \frac{400}{e^{2b}} \cdot e^{9b} = 140 \Rightarrow 400 \cdot e^{7b} = 140 \Rightarrow e^{7b} = \frac{7}{20} \Rightarrow 7b = \ln\left(\frac{7}{20}\right)$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{7} \cdot \ln\left(\frac{7}{20}\right) \approx -0,15 \Rightarrow a = \frac{400}{e^{-0,30}} \approx 540$$

$$\Rightarrow \text{Rasenfläche: } 540 \text{ m}^2 \triangleq 90 \% \quad x \text{ m}^2 \triangleq 100 \% \Rightarrow x = \frac{540 \cdot 100}{90} = 600 \text{ m}^2$$

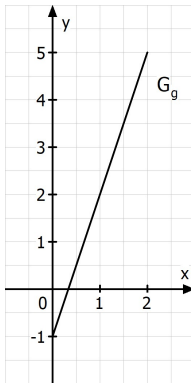
30.2

$$\text{Mit Moos bedeckte Fläche: } 540 \text{ m}^2 \Rightarrow 0,35 \cdot 540 = 189 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow 189 = 540 \cdot e^{-0,15t} \Rightarrow e^{-0,15t} = 0,35 \Rightarrow -0,15t = \ln(0,35) \Rightarrow t = \frac{\ln(0,35)}{-0,15} \approx 7$$

$\Rightarrow$ Die Werbeaussage trifft annähernd zu.

31.1 Nullstelle: $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$



31.2 $\int_0^2 g(x) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - x \right]_0^2 = \left(\frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \right) - 0 = 4$

Es handelt sich um eine Flächenbilanz, bei der die Fläche, die G_g mit der x-Achse einschließt und oberhalb der x-Achse liegt größer ist als die Fläche, die unterhalb der x-Achse liegt.

32 $S(2|2k-1) \quad 2k-1 < 0 \Rightarrow k < \frac{1}{2}$

- 33 a) Falsch. G_h sms in $[0; \infty[$
 b) Wahr. h hat bei $x = -2$ eine doppelte Nullstelle
 c) Falsch. $h(-2) = 0 \quad h'(0) = 0 \Rightarrow h(-2) + h'(0) = 0$

34
 $f'(x) = 2 \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) = -2 \cdot e^{-x+1}$
 $f'(x) < 0$ für $x \in [1; \infty[\Rightarrow G_f$ smf in $[1; \infty[$
 $f(1) = 2 \cdot e^{-1+1} - 1 = 1 \quad x \rightarrow \infty \quad \underbrace{2 \cdot e^{-x+1}}_{\rightarrow 0^+} - 1 \rightarrow -1$
 $\Rightarrow W_f =]-1; 1]$

35
 $(e^x - 2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x + 4 - 4 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x = 0$
 $\Rightarrow e^x(e^x - 4) = 0 \quad e^x = 0 \text{ (f)} \quad e^x - 4 = 0 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4)$

- 36 Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_1 , zu dem die Anzahl der Bakterien noch 40 % vom Anfangsbestand beträgt.

$0,4 = \left(\frac{1}{2} \right)^{t_1} \Rightarrow t_1 = \log_{0,5}(0,4)$

37.1

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x$$

$$-\frac{1}{2}x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4 \right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad -\frac{1}{2}x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{8} \quad x_3 = \sqrt{8}$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow G_f \text{ sms in }]-\infty; -\sqrt{8}] \text{ sowie in } [0; \sqrt{8}]$$

$$G_f \text{ smf in } [-\sqrt{8}; 0] \text{ sowie in } [\sqrt{8}; \infty[$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{8} \text{ HOP HOP}(-\sqrt{8}|8) \quad x = 0 \text{ TIP TIP}(0|0) \quad x = \sqrt{8} \text{ HOP HOP}(\sqrt{8}|8)$$

$$\Rightarrow W_f =]-\infty; 8]$$

37.2

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{8}{3}} \quad x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Skizze von f'' :

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{8}{3}} \text{ WP} \quad x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \text{ WP}$$

Da f' eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit negativem Leitkoeffizienten ist, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kann es keine Stellen mit maximaler bzw. minimaler Steigung geben.

37.3

Tangente: $y = mx + t$

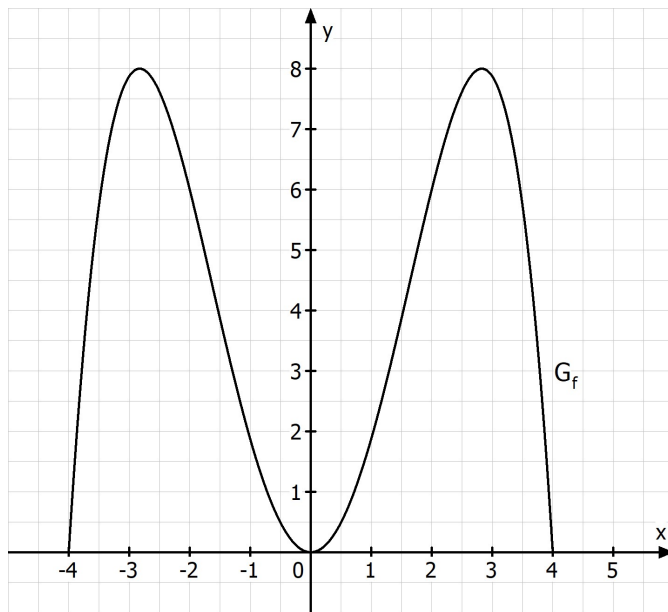
$$m = f'(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2) = 4 - 8 = -4$$

$$P(-2|y_p) \quad y_p = -\frac{1}{8} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 = -2 + 8 = 6$$

$$\Rightarrow 6 = -4 \cdot (-2) + t \Rightarrow t = -2$$

$$\Rightarrow y = -4x - 2$$

37.4



38.1 $x_1 = 0$ einfach $x_2 = 10$ doppelt $x_3 = 24$ einfach

38.2

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{1}{100}x(x^2 - 20x + 100)(x - 24) = \\
 &= -\frac{1}{100}x(x^3 - 24x^2 - 20x^2 + 480x + 100x - 2400) = \\
 &= -\frac{1}{100}(x^4 - 24x^3 - 20x^3 + 480x^2 + 100x^2 - 2400x) = \\
 &= -\frac{1}{100}(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x)
 \end{aligned}$$

38.3

$$f'(x) = -\frac{1}{100}(4x^3 - 132x^2 + 1160x - 2400)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 132x^2 + 1160x - 2400 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ durch Probieren}$$

$$(4x^3 - 132x^2 + 1160x - 2400) : (x - 3) = 4x^2 - 120x + 800$$

$$4x^2 - 120x + 800 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 4 \cdot 4 \cdot 800}}{8} = \frac{120 \pm 40}{8}$$

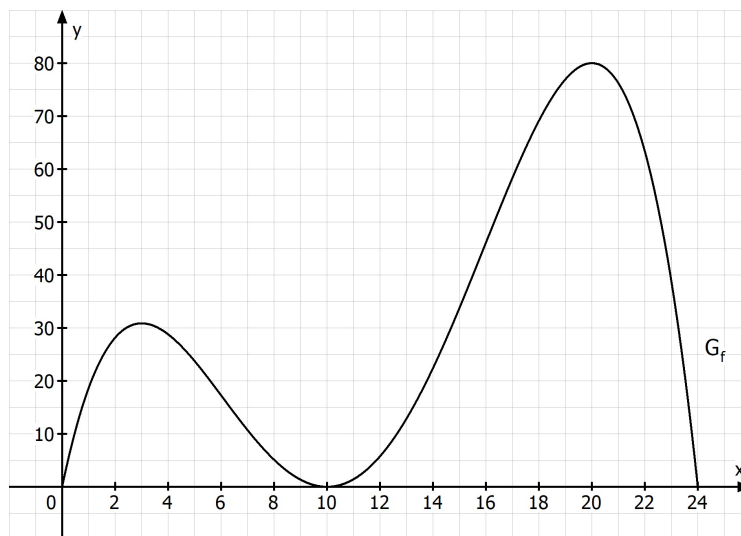
$$\Rightarrow x_2 = 20 \quad x_3 = 10$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow x = 3 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(3|30,87) \quad x = 10 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(10|0) \quad x = 24 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(20|80)$$

$$\Rightarrow W_f =]-\infty; 80]$$

38.4



39.1

$$(I) N(5) = 18 \Rightarrow N_0 \cdot e^{5c} = 18$$

$$(II) N(9) = 60 \Rightarrow N_0 \cdot e^{9c} = 60$$

$$(I) \Rightarrow N_0 = \frac{18}{e^{5c}}$$

$$(I) \text{ in } (II) \Rightarrow \frac{18}{e^{5c}} \cdot e^{9c} = 60 \Rightarrow 18 \cdot e^{4c} = 60 \Rightarrow e^{4c} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 4c = \ln\left(\frac{10}{3}\right) \Rightarrow c = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{4} \approx 0,301$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{18}{e^{5 \cdot 0,301}} \approx 4$$

39.2.1

$$4 \cdot e^{0,301t} = 440 \Rightarrow e^{0,301t} = 110 \Rightarrow 0,301t = \ln(110) \Rightarrow t = \frac{\ln(110)}{0,301} \approx 15,62$$

Im Jahr 2024 wird die Anzahl der Wolfsrudel voraussichtlich 440 erreichen.

39.2.2

$$N(t) = 4 \cdot 1,351^t \quad e^{0,301} \approx 1,351$$

Die Anzahl der Wolfsrudel nimmt im Jahr um ca. 35,1 % zu.

40.1

$$E(0) = 86,3 \quad E(3) = 70$$

$$\Rightarrow \frac{86,3 - 70}{0 - 3} = -\frac{163}{30} \approx -5,43$$

Von 2014 bis 2017 war pro Jahr ein durchschnittlicher Ertragsrückgang von ca. 5,43 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zu verzeichnen.

40.2

$$(I) 56,3 \cdot e^{c \cdot 0} + a = 86,3 \Rightarrow a = 30$$

$$(II) 56,3 \cdot e^{3c} + a = 70$$

$$(II) \Rightarrow 56,3 \cdot e^{3c} + 30 = 70 \Rightarrow 56,3 \cdot e^{3c} = 40 \Rightarrow e^{3c} = \frac{40}{56,3}$$

$$\Rightarrow 3c = \ln\left(\frac{40}{56,3}\right) \Rightarrow c = \frac{\ln\left(\frac{40}{56,3}\right)}{3} \approx -0,11$$

40.3.1

$$56,3 \cdot e^{-0,11t} + 30 = 50 \Rightarrow 56,3 \cdot e^{-0,11t} = 20 \Rightarrow e^{-0,11t} = \frac{20}{56,3}$$

$$\Rightarrow -0,11t = \ln\left(\frac{20}{56,3}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{20}{56,3}\right)}{-0,11} \approx 9,41$$

$\Rightarrow$ ab dem Jahr 2024

40.3.2

$$t \rightarrow \infty \quad 56,3 \cdot \underbrace{e^{-0,11t}}_{\rightarrow 0^+} + 30 \rightarrow 30$$

Der durchschnittliche Ertrag pro Hektar Anbaufläche würde langfristig bei 30 Dezitonnen liegen.

40.3.3

$$\frac{E(1) + E(2) + E(3)}{3} = \frac{80,44 + 75,18 + 70,48}{3} \approx 75,37 \quad E(4) \approx 66,26$$

$$\frac{66,26}{75,37} \approx 0,8791 \Rightarrow \text{Ertragsrückgang von } 12,09 \%$$

$\Rightarrow$ es gab keine Antragsberechtigung

41.1

$$g(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^4 + 2(-x)^2 = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = g(x) \quad \text{Definitionsmenge ist symmetrisch}$$

$\Rightarrow G_g$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

41.2

$$g'(x) = -x^3 + 4x \Rightarrow -x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_2 = -2 \quad x_3 = 2$$

Skizze von g' :

$\Rightarrow$ Extremstellen bei $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$

Randextremstellen: $x = -3$ und $x = 3$

42.1

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= -0,025(3x^2 - 24x + 36) \\
 -0,025(3x^2 - 24x + 36) &= 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \\
 \Rightarrow x_{1/2} &= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 3 \cdot 36}}{6} = \frac{24 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{24 \pm 12}{6} \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 6
 \end{aligned}$$

Skizze von g' :

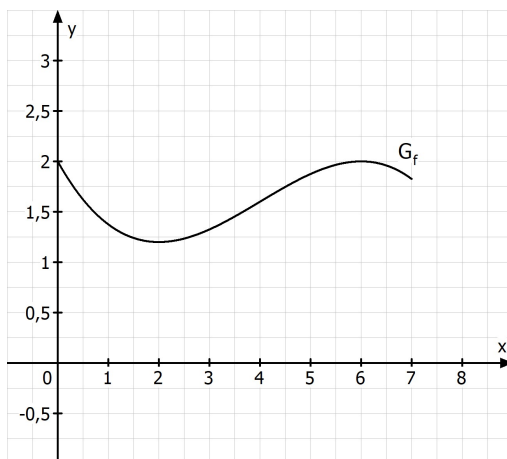
$$\Rightarrow x = 2 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(2|1,2) \quad x = 6 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(6|2)$$

Betrachtung der Randwerte: $x = 0$ Randmax $(0|2)$ $x = 7$ Randmin $(7|1,825)$

Absoluter Tiefpunkt bei $x = 2$; absoluter Hochpunkt bei $x = 0$ und $x = 6$

$$\Rightarrow W_g = [1,2;2]$$

42.2



$$42.3 \quad A = \int_2^6 g(x) dx = \left[-0,025 \left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 80x \right) \right]_2^6 = 9,3 - 2,9 = 6,4$$

43.1

Der Delfin springt nach 5,3 Sekunden aus dem Wasser und taucht nach 7 Sekunden wieder ins Wasser ein.

Die angegebene Definitionsmenge macht keinen Sinn, da für $t \rightarrow \infty$ $T(t) \rightarrow -\infty$ gilt, aber eine unendliche Tauchtiefe macht keinen Sinn.

43.2

$$\begin{aligned}
 T(t) &= -\frac{1}{12}(x-1)^2(x-7)(x-a) \\
 s\left(0 \mid -\frac{28}{9}\right) &\Rightarrow -\frac{28}{9} = -\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (-7) \cdot (-a) \Rightarrow -\frac{28}{9} = -\frac{7}{12}a \Rightarrow a = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

44.1

$$f(x) = a(x+2)(x-2) \quad f(0) = 4 \Rightarrow 4 = a \cdot 2 \cdot (-2) \Rightarrow a = -1$$

$$A = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = \frac{32}{3}$$

44.2

G_f smf in $]-\infty; 2]$ sowie in $[2; \infty[$

G_f sms in $[-2; 2]$

$$x \rightarrow -\infty \quad F(x) \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow \infty \quad F(x) \rightarrow -\infty$$

G_f hat HOP bei $x = 2$ und bei $x = -2$ (Nullstellen mit VZW von f)

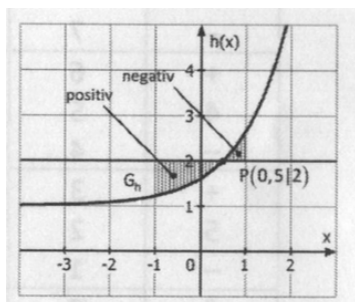
G_f hat einen Wendepunkt bei $x = 0$ (Extremstelle von f)

45.1

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow h(x) \rightarrow 1 \Rightarrow y_0 = 1$$

$$P(0,5|2) \in G_h \Rightarrow e^{0,5+d} + 1 = 2 \Rightarrow e^{0,5+d} = 1 \Rightarrow 0,5 + d = 0 \Rightarrow d = -0,5$$

45.2



46.1 $A(t) = 0,5 \cdot 2^t$

46.2

$$2^t = (e^{\ln 2})^t = (e^{0,6931})^t = e^{0,6931t} \Rightarrow A(t) = 0,5 \cdot e^{0,6931t}$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot 188,5 = \frac{377}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{377}{3} = 0,5e^{0,6931t} \Rightarrow e^{0,6931t} = \frac{754}{3} \Rightarrow 0,6931t = \ln\left(\frac{754}{3}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{754}{3}\right)}{0,6931} \approx 7,97$$

Nach etwa 8 Tagen wären $\frac{2}{3}$ der gesamten Beckengrundfläche von Algen bedeckt.

$$\Rightarrow 3773 = 0,$$

$$47.1 \quad 0,5^{\frac{t}{4,88}} = \left(e^{\ln 0,5} \right)^{\frac{t}{4,88}} = \left(e^{\frac{\ln 0,5}{4,88}} \right)^t = \left(e^{-0,142} \right)^t = e^{-0,142 \cdot t}$$

47.2

$$2000 \cdot e^{-0,142t} = 100 \Rightarrow e^{-0,142t} = 0,05 \Rightarrow -0,142t = \ln(0,05) \Rightarrow t = \frac{\ln(0,05)}{-0,142} \approx 21,097$$

Das Ladegerät schaltet sich nach etwa 21 Minuten ab.

$$D = [0; 21]$$

48.1

$$x_1 = 3 \text{ (doppelt)} \quad x_2 = -\frac{2}{3} \text{ (einfach)}$$

Skizze von h:

$$\Rightarrow \text{der lokale Hochpunkt liegt im Intervall } \left] -\frac{2}{3}; 3 \right[$$

48.2 Die Funktion k ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit positivem Leitkoeffizienten, d.h. die Ableitungsfunktion muss eine nach oben geöffnete Parabel sein $\Rightarrow G_c$.

49.1

$$f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (-2)}}{-1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-1} = -2$$

49.2

$$f'(x) = -2x^3 - 6x^2 - 4x \quad -2x^3 - 6x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(-2x^2 - 6x - 4) = 0$$

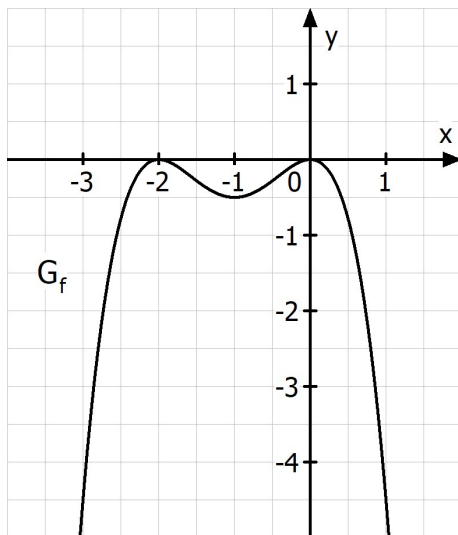
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad -2x^2 - 6x - 4 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4)}}{-4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{-4} = \frac{6 \pm 2}{-4}$$

$$\Rightarrow x_2 = -2 \quad x_3 = -1$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow x = -2 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(-2|0) \quad x = -1 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(-1|-0,5) \quad x = 0 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(0|0)$$

49.3



50.1

$$g(x) = mx + t$$

$$m = f'(0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 14x + 8) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow g(x) = x + t$$

$$P(0|2) \Rightarrow g(x) = x + 2$$

50.2

$$\frac{1}{8}(3x^2 - 14x + 8) = -2 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 8 = -16 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{6} = \frac{14 \pm \sqrt{-92}}{6}$$

$\Rightarrow$ es gibt keinen Punkt von G_f mit der Steigung $m = -2$

50.3

$$f''(x) = \frac{1}{8}(6x-14) \quad \frac{1}{8}(6x-14) = 0 \Rightarrow 6x-14=0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

Skizze von f'' :

$$\Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ WP} \quad \text{WP} \left(\frac{7}{3} \mid \frac{125}{108} \right)$$

51.1

$$2e^x - 1 = e^{2x} \Rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

Substitution: $x = e^x$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0|1)$$

$$51.2 \quad 2e^x - 1 \xrightarrow{\text{Spiegelung an der x-Achse}} -(2e^x - 1) = -2e^x + 1 \xrightarrow{\text{Verschiebung um 2 in y-Richtung}} j(x) = -2e^x + 3$$

52.1

$$T(5) = 250 \cdot 5 \cdot e^{-0,1 \cdot 5} + 22 = 780,16$$

$\Rightarrow$ Die Temperatur beträgt nach fünf Minuten ca. 780°C

$$t \rightarrow +\infty \quad 250 \cdot \underbrace{t \cdot e^{-0,1 \cdot t}}_{\substack{\rightarrow +\infty \quad \rightarrow 0^+ \\ \rightarrow 0^+}} + 22 \rightarrow 22 \quad (\text{e-Funktion überwiegt})$$

Auf lange Sicht stellt sich eine Temperatur von 22°C ein.

52.2

$$\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0,1t} + 250 \cdot t \cdot e^{-0,1t} \cdot (-0,1) = e^{-0,1t} \cdot (250 - 25t)$$

$$\dot{T}(t) = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{-0,1t}}_{>0} \cdot (250 - 25t) = 0 \Rightarrow 250 - 25t = 0 \Rightarrow t = 10$$

Skizze von $\dot{T}$: $e^{-0,1t}$ immer positiv

Skizze von $(250 - 25t)$:

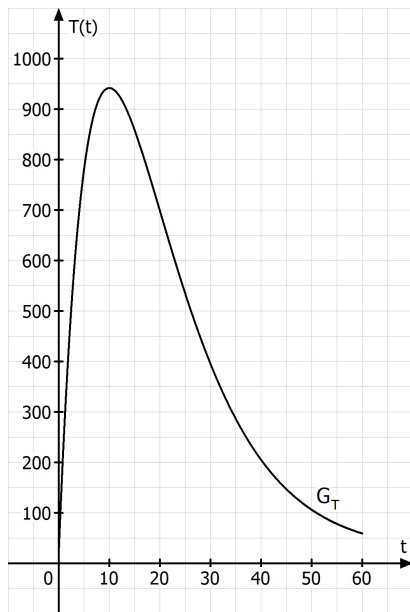
$\Rightarrow t = 10$ Maximum

Da T für $t \geq 0$ nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow t = 10$ absolutes Maximum

$$T(10) = 250 \cdot 10 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} + 22 = 941,70$$

$\Rightarrow$ Das Temperaturmaximum beträgt ca. 942°C

52.3



$$T(0) = 22 \Rightarrow 22 \cdot 20 = 440 \Rightarrow t_{20\text{-fach}} \approx 28$$

52.4

$$\dot{T}(20) = (250 - 25 \cdot 20) \cdot e^{-0,1 \cdot 20} \approx -33,83$$

Nach 20 Minuten ist die Abkühlgeschwindigkeit mit $34 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$ betraglich am größten

53.1

$$p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$(I) \quad p(0) = 6,0 \Rightarrow 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot 0} = 6,0 \Rightarrow b = 2,8$$

$$(II) \quad p(40) = 3,5$$

$$\Rightarrow 3,2 + b \cdot e^{-40k} = 3,5 \Rightarrow 2,8 \cdot e^{-40k} = 0,3 \Rightarrow e^{-40k} = \frac{3}{28}$$

$$\Rightarrow -40k = \ln\left(\frac{3}{28}\right) \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{3}{28}\right)}{-40} \approx 0,056$$

53.2.1

$$p(t) = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056t}$$

$$3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056t} = 4,0 \Rightarrow 2,8 \cdot e^{-0,056t} = 0,8 \Rightarrow e^{-0,056t} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow -0,056t = \ln\left(\frac{2}{7}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{-0,056} \approx 22,37$$

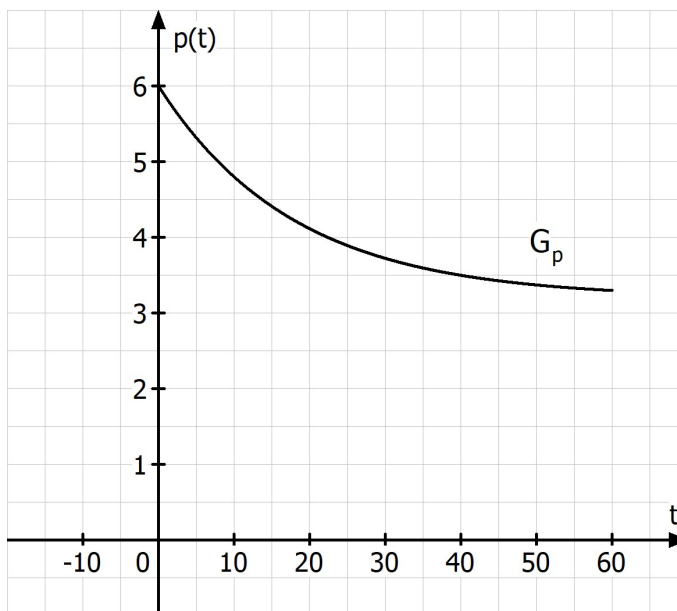
$\Rightarrow$ die Zugabe des Sauerteigs zum Brotteig ist nach etwa 22,4 Stunden möglich

$$p'(t) = 2,8 \cdot e^{-0,056t} \cdot (-0,056) = -0,1568 \cdot e^{-0,056t}$$

$$p'(22,4) = -0,045$$

Die Abnahmegeschwindigkeit beträgt nach 22,4 Stunden 0,045 pro Stunde.

53.2.2



54.1

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 12x^2 + 36x + 49 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ (durch Probieren)}$$

$$(x^3 - 12x^2 + 36x + 49) : (x - 1) = x^2 - 13x + 49$$

$$x^2 - 13x + 49 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{-27}}{2} \text{ keine weiteren Nst.}$$

54.2

$$f'(x) = \frac{1}{14}(3x^2 - 24x + 36)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0$$

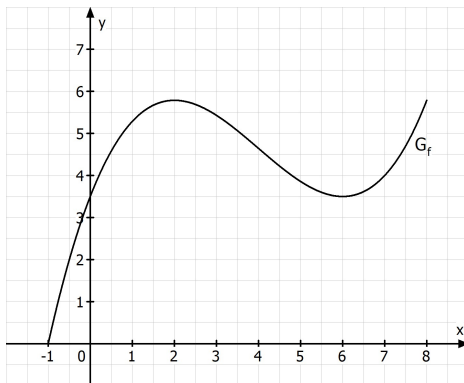
$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 3 \cdot 36}}{6} = \frac{24 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{24 \pm 12}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 2$$

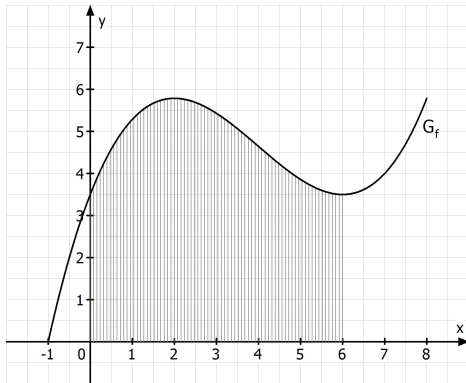
Skizze von f' :

$$\Rightarrow x_1 = 6 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(6|3,5) \quad x_2 = 2 \text{ HOP} \quad \text{HOP}\left(2 \middle| \frac{81}{14}\right)$$

54.3



54.4



$$A = \int_0^6 f(x) dx = \left[\frac{1}{14} \left(\frac{1}{4} x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 49x \right) \right]_0^6 = \left(\frac{1}{14} \cdot 402 \right) - 0 \approx 28,71$$

55.1 $x \rightarrow -\infty \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad f(x) \rightarrow -\infty$

55.2

$$f'(x) = -\frac{1}{8}(4x^3 - 12x + 8)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ (durch Ausprobieren)}$$

$$(4x^3 - 12x + 8) : (x - 1) = 4x^2 + 4x - 8$$

$$4x^2 + 4x - 8 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{-4 \pm 12}{8}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow x_1 = -2 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(-2|3) \quad x_2 = 1 \text{ TEP} \quad \text{TEP}\left(1 \mid -\frac{3}{8}\right)$$

55.3

$$f''(x) = -\frac{1}{8}(12x^2 - 12)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

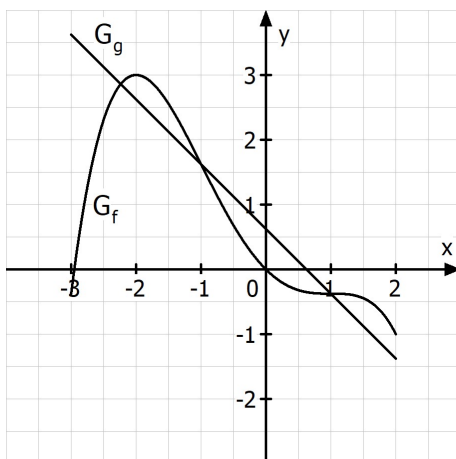
Skizze von f'' :

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ WP} \quad \text{WP}\left(-1 \mid \frac{13}{8}\right) \quad x_2 = 1 \text{ WP (sogar TEP)} \quad \text{TEP}\left(1 \mid -\frac{3}{8}\right)$$

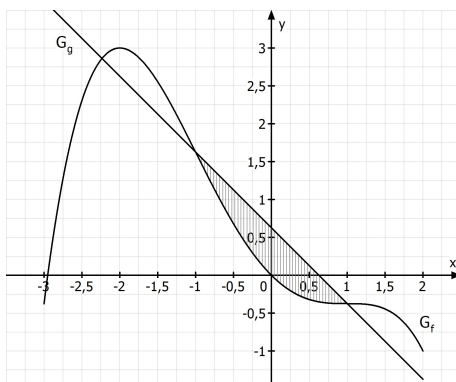
$$g(-1) = \frac{13}{8} \quad g(1) = -\frac{3}{8}$$

$\Rightarrow g$ verläuft durch die beiden Wendepunkte

55.4



55.5

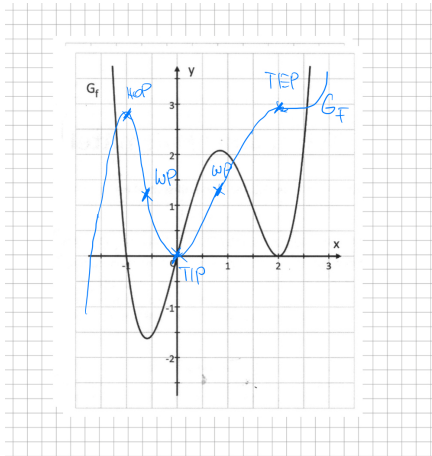


$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^1 \left(-x + \frac{5}{8} + \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8} \right) dx = \\
 &= \left[\frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{8}x \right]_{-1}^1 = (0,4) - (-0,4) = 0,8
 \end{aligned}$$

56.1

Aussage	w	f	n. e.
$f''(-1) > 0$	x		
$f'(2) = f(2)$	x		
Die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle $x = -0,5$ ist negativ.		x	
F hat genau drei Nullstellen.			x

56.2



57

$$h'(x) = e^{x-2} + x \cdot e^{x-2}$$

$$m = h'(2) = 1 + 2 = 3 \quad h(2) = 2$$

$$y = mx + t \Rightarrow 2 = 3 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -4 \Rightarrow y = 3x - 4$$

58.1

$$(I) \quad h(0) = -1 \Rightarrow c \cdot e^0 = -1 \Rightarrow c = -1$$

$$(II) \quad h(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0 \quad (e^{-1} > 0) \Rightarrow a - b - 1 = 0$$

$$(III) \quad h(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \quad (e^2 > 0) \Rightarrow 4a + 2b - 1 = 0$$

$$(II) \Rightarrow a = b + 1$$

$$(III) \Rightarrow 4(b + 1) + 2b - 1 = 0 \Rightarrow 6b + 3 = 0 \Rightarrow b = -0,5$$

$$\Rightarrow a = -0,5 + 1 \Rightarrow a = 0,5$$

58.2 Maßzahl der Fläche, die der Graph mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten einschließt.

59.1

$$N(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^{-0,2} + 5 = 5 \quad N(5) = 2 \cdot 25 \cdot e^{-0,875} + 5 = 26,91$$

Zu Beginn sind es etwa 5000 Bienen und nach fünf Wochen knapp 27000 Bienen.

59.2

$$\dot{N}(t) = 4t \cdot e^{-0,125t-0,2} + 2t^2 \cdot e^{-0,125t-0,2} \cdot (-0,125) = e^{-0,125t-0,2} \cdot (4t - 0,25t^2)$$

$$\dot{N}(t) = 0 \Rightarrow 4t - 0,25t^2 = 0 \quad e^{-0,125t-0,2} > 0$$

$$\Rightarrow t(4 - 0,25t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad 4 - 0,25t = 0 \Rightarrow t_2 = 16$$

Skizze von $\dot{N}$: $e^{-0,125t-0,2}$ immer positiv

Skizze von $(4t - 0,25t^2)$:

$\Rightarrow t = 16$ Maximum

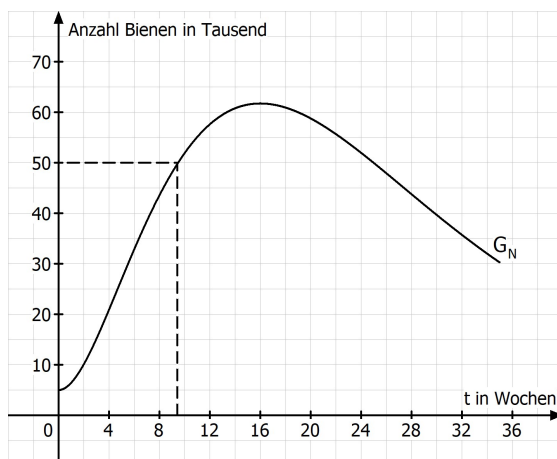
Bei $t = 16$ einziger Monotoniewechsel im betrachteten Bereich

$\Rightarrow t = 16$ absolutes Maximum

$$N(16) = 61,73$$

Nach 16 Wochen ist mit 61730 die maximale Anzahl von Bienen erreicht.

59.3



Nach etwa zehn Wochen, also im Mai beträgt die Anzahl der Bienen erstmals über 50000.

59.4 Laut Angabe liegt bei $x = 4,7$ eine Wendestelle vor, nach Zeichnung an dieser Stelle die größte Steigung. Nach 4,7 Wochen nimmt die Anzahl der Bienen am stärksten zu und zwar um 6,04 Tausend Bienen pro Woche.

60.1

$$t \rightarrow +\infty \quad 36,5 + \underbrace{2t \cdot \underbrace{e^{-0,25t}}_{\substack{\rightarrow 0_+ \\ \rightarrow 0_+}}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow 36,5 \quad e\text{-Funktion dominiert}$$

Langfristig stellt sich eine Temperatur von 36,5 °C ein.

60.2

$$\dot{T}(t) = 2e^{-0,25t} + 2t \cdot e^{-0,25t} \cdot (-0,25) = e^{-0,25t} (2 - 0,5t)$$

$$\dot{T}(t) = 0 \Rightarrow 2 - 0,5t = 0 \quad e^{-0,25t} > 0 \Rightarrow t = 4$$

Skizze von $\dot{T}$: $e^{-0,25t}$ immer positiv

Skizze von $(2 - 0,5t)$:

$\Rightarrow t = 4$ Maximum

Bei $t = 4$ einziger Monotoniewechsel im betrachteten Zeitraum

$\Rightarrow t = 4$ absolutes Maximum

$$T(4) = 39,4 \text{ °C}$$

Die höchste Körpertemperatur der erkrankten Person beträgt 39,4 °C.